Внутри прямоугольника со сторонами a и b расположен ещё один прямоугольник со сторонами c и d так, как показано на рисунке – одна из диагоналей внешнего проходит через середины сторон внутреннего и две вершины внутреннего лежат на сторонах внешнего. Считая величины a, b и c известными, найти значение d.

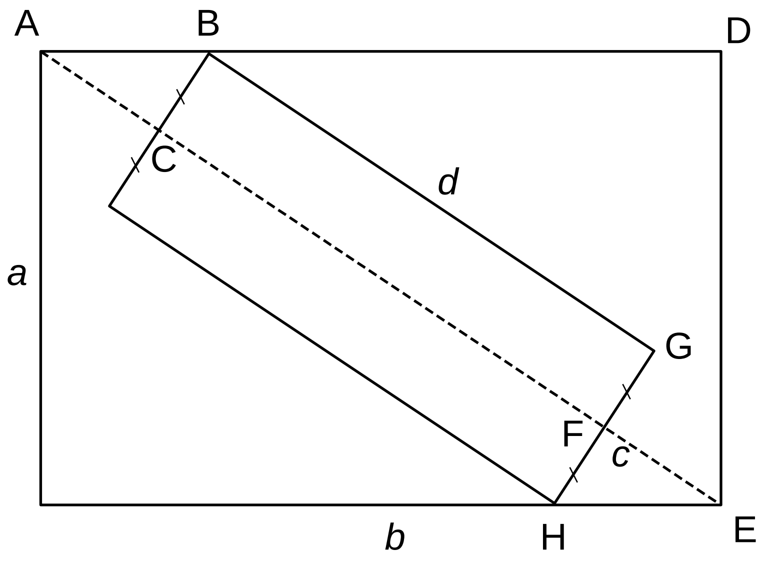

Рис. 1.

Р е ш е н и е

Во внутреннем прямоугольнике (рис. 1) отрезки BC и FG параллельны, так как лежат на противоположных сторонах данного прямоугольника, а так как по условию задачи BC = FG, следовательно четырёхугольник BCFG является параллелограммом. Поскольку в параллелограмме противоположные углы равны и по условию задачи ∠CBG и ∠BGF – прямые, то из этого следует, что ∠BCF и ∠CFG также являются прямыми и таким образом BCFG является прямоугольником: CF = BG = d, а BC = FG = c/2 .

Таким образом AE⊥BC и AE⊥FH, то есть ∠ACB и ∠HFE – прямые. ∠BAC и ∠FEH – накрест лежащие углы, образованные секущей AE, проходящей через параллельные прямые AB и HE, следовательно ∠BAC = ∠FEH и, соответственно, ∠ABC = ∠FHE. Отсюда вытекает, что △ABC и △FHE равны между собой по стороне и двум прилежащим к ней углам. Таким образом AC = FE.

Длина диагонали внешнего прямоугольника равна сумме длин составляющих её отрезков:

$$AE = AC + CF + FE$$

Отсюда

$$AE = 2\cdot AC + CF$$

и

$$d = AE - 2\cdot AC$$

Для нахождения длины AC рассмотрим △ABC и △ADE. Эти треугольники подобны по двум углам (∠ACB и ∠ADE – прямые, а ∠BAC у треугольников общий), следовательно

$$\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{DE}$$

или

$$\frac{AC}{b}=\frac{\frac{c}{2}}{a}$$

Отсюда

$$AC=\frac{bc}{2a}$$

По теореме Пифагора:

$$AE^2 = a^2 + b^2$$

Окончательно получаем:

$$d = \mathrm{AE} - 2 \cdot \mathrm{AC} = \sqrt{a^2 + b^2} - 2 \cdot \frac{bc}{2a} = \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{bc}{a}$$

О т в е т

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} - \frac{bc}{a}$$