Школьные задачи / Геометрия / Г-4

Попавший ночью в шторм парусник затонул. Из экипажа выжить удалось лишь одному человеку, который остался на поверхности воды и держится за спасательный круг. На рассвете небо полностью расчистилось от облаков и наступил полный штиль. В 15 км от выжившего оказался ещё один парусный корабль, на мачте которого в «вороньем гнезде» дежурит очень зоркий матрос и с высоты 15 м над водой осматривает море окрест. Сможет ли он увидеть выжившего в кораблекрушении, чтобы сообщить капитану судна о человеке за бортом?

При решении задачи рекомендуется использовать инженерный микрокалькулятор; радиус Земли считать равным 6370 км.

Р е ш е н и е

По причине шарообразной формы Земли дальность видимости ограничена кривизной её поверхности. Пусть корабль с матросом-наблюдателем располагается в точке С (рис. 1), а сам матрос обозревает окрестности из точки А, находясь на высоте *h*. (отрезок АС). Максимальное расстояние, на которое он видит вокруг, ограничивается длиной дуги ◡ВС, поскольку в точке В луч зрения проходит по касательной к поверхности (для наблюдателя множество подобных точек образуют линию горизонта). Для определения длины ◡ВС необходимо знать величину угла α. Так как радиус ОВ проведён в точку касания, ОВ⊥АВ и △АВО – прямоугольный. Следовательно

$$\cos\alpha = \frac{r}{r+h}.$$

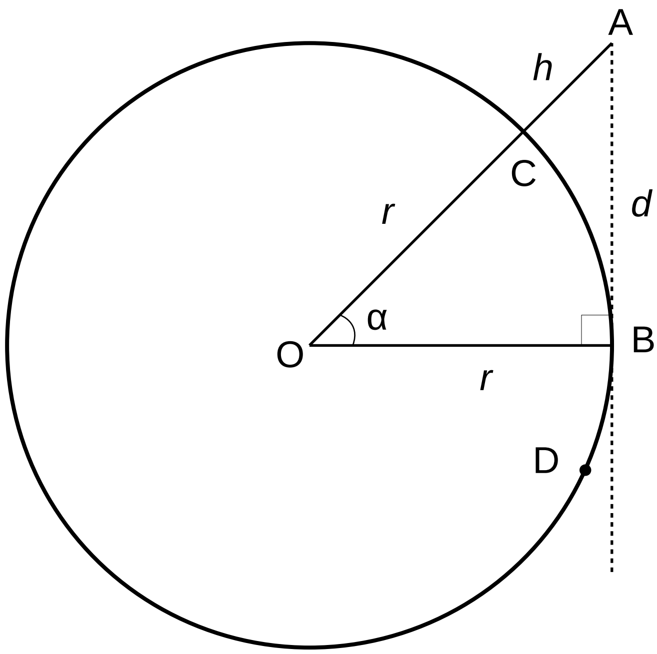

Рис. 1.

Отсюда

$$\smile BC = 2\pi r \cdot \frac{\arccos\left(\dfrac{r}{r+h}\right)}{360^\circ}.$$

Если α выразить в радианах, то выражение для ◡ВС упростится (360°=2π рад):

$$\smile BC = r \cdot \arccos\left(\frac{r}{r+h}\right).$$

Вычислим на калькуляторе искомую величину, помня что r = 6370 км = 6 370 000 м:

$$\smile BC = 6370000 \cdot \arccos\left(\frac{6370000}{6370000+15}\right) \approx 13800\,\text{м}$$

Выживший находится в 15 км = 15000 м от судна и 15000 > 13800, следовательно матрос-наблюдатель никак не сможет увидеть человека за бортом, поскольку тот находится за горизонтом, что схематически показано точкой D на рис. 1.

О т в е т

Матрос-наблюдатель не сможет увидеть выжившего в кораблекрушении.

К о м м е н т а р и й

Данную задачу можно решить иначе, учитывая, что из-за размеров Земли длина дуги ◡ВС мало отличается от катета АВ в △АВО, равного *d*. В этом случае по теореме Пифагора:

$$d=\sqrt{(r+h)^2-r^2}=\sqrt{r^2+2rh+h^2-r^2}=\sqrt{2rh+h^2}=\sqrt{h(2r+h)}$$

Так как $2r >> h$ ($2r$ много больше h), то $2r + h \approx 2r$ и

$$\sqrt{h(2r+h)}\approx\sqrt{2hr}\ .$$

Отсюда имеем ещё одну формулу для определения дальности горизонта:

$$d=\sqrt{2hr}\ .$$

Если подставить в неё числа из условий задачи, получим, что

$$d=\sqrt{2\cdot 15\cdot 6370000}\approx 13800\ \text{м}\ .$$

Как видно, при округлении здесь результата до третьей значащей цифры (по условию задачи r известна с точностью до третьего знака: $6{,}37\cdot 10^6$ м, остальные величины можно считать известными точно), он совпадает с полученным ранее.

Стоит заметить, что в реальности на дальность видимости горизонта влияет много дополнительных факторов, таких как рельеф местности (в том числе – волнение моря), запылённость (прозрачность) атмосферы, конвективные потоки воздуха и т. п. По указанным причинам для практических целей удобнее пользоваться приближённой формулой.