Тетраэдр, у которого все рёбра имеют одинаковую длину, называется правильным, и он обладает следующими свойствами: а) все четыре грани тетраэдра являются равносторонними треугольниками, равными между собой; б) любая его высота пересекает грань в точке, равноудалённой от каждого из рёбер этой грани; в) внутри тетраэдра есть точка, которая равноудалена от его вершин и является точкой пересечения высот тетраэдра.

Найти косинус угла, вершина которого находится в точке пересечения высот тетраэдра, а стороны проходят через любые две его вершины.

Р е ш е н и е

Вариант 1.

Рассмотрим правильный тетраэдр $ABCD$, в котором O – точка пересечения его высот. По условию задачи достаточно будет найти косинус $\angle BOD$. Для удобства обозначим длину ребра тетраэдра как a, а величину $\angle BOD$ – как α. Опустим из вершины D высоту на грань ABC. Она пересечёт её в точке E (рис. 1).

Выразим через a величину отрезка BE, для этого отдельно рассмотрим $\triangle ABC$, в котором из точки E опустим перпендикуляры EN и EM на стороны AB и BC соответственно (рис. 2).

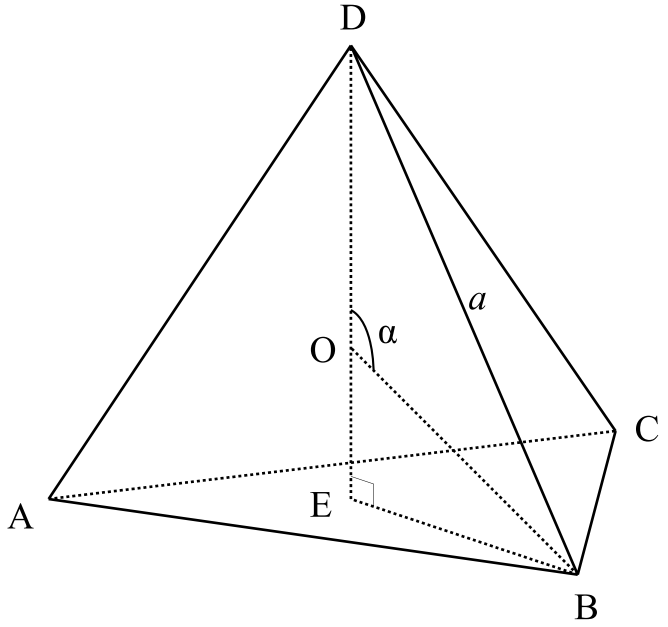

Рис. 1

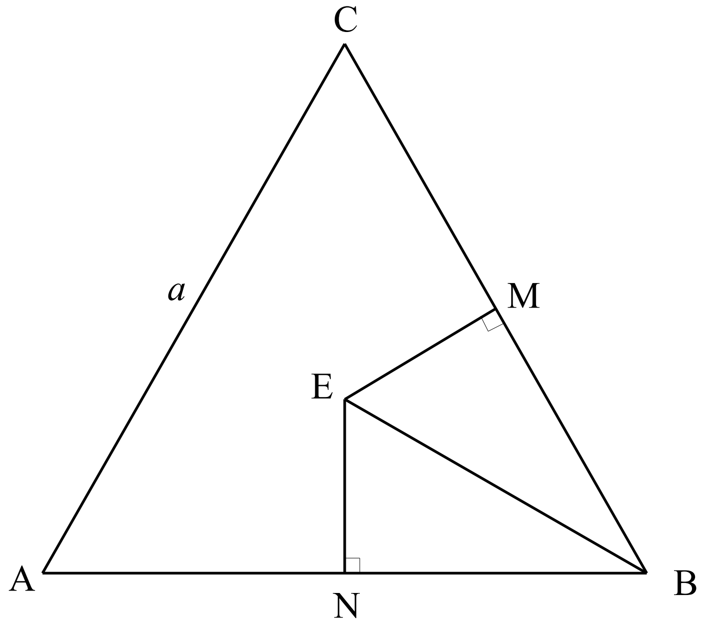

Рис. 2.

Точка E равноудалена от граней $\triangle ABC$ ($EN = EM$), а поскольку он является равносторонним, то это означает, что E является ещё и точкой пересечения биссектрис углов такого треугольника, каждый из которых равен 60º. Отсюда следует, что BE является биссектрисой для $\angle NBM$ и таким образом $\angle EBN$ = 30º. В этом случае в прямоугольном треугольнике $\triangle BEN$: $EN = BE / 2$. В равностороннем треугольнике точки пересечения биссектрис, медиан и высот совпадают (как и сами биссектрисы, медианы и высоты), из этого следует, что $BN = AB / 2 = a / 2$ (отрезок EN лежит на высоте из вершины C к стороне AB). В соответствии с теоремой Пифагора для $\triangle BEN$ можно записать:

$$BE^2 = EN^2 + BN^2$$

или

$$BE^2 = \left(\frac{BE}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Отсюда можно получить, что

$$BE^2 = \frac{a^2}{3}.$$

Рассмотрим теперь другой треугольник, а именно $\triangle BED$ (рис. 3). По условию задачи в нём $DO = BO$. Обозначим длину этих отрезков как x. В этом случае

$$DE = x + EO$$

Так как DE – высота, то $\triangle BEO$ и $\triangle BED$ прямоугольные, поэтому в соответствии с теоремой Пифагора можно записать:

$$BO^2 = BE^2 + EO^2$$
$$BD^2 = DE^2 + BE^2$$

или

$$x^2 = \frac{a^2}{3} + EO^2$$
$$a^2 = DE^2 + \frac{a^2}{3}$$

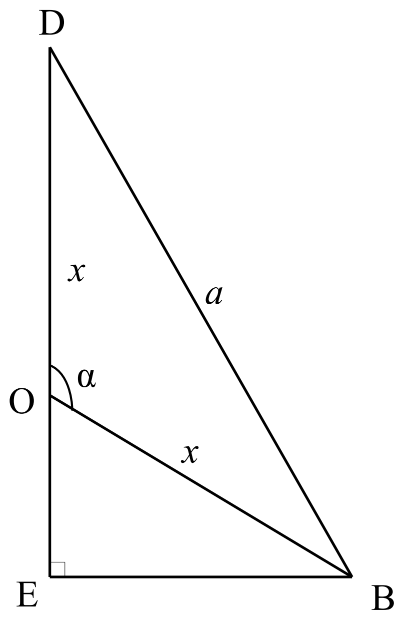

Рис. 3.

Из последнего выражения можно выразить величину DE:

$$DE = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Найдём теперь EO:

$$EO = DE - x = a\sqrt{\frac{2}{3}} - x,$$

после чего подставим полученное равенство в соотношение для $\triangle BEO$:

$$x^2 = \frac{a^2}{3} + \left(a\sqrt{\frac{2}{3}} - x\right)^2.$$

Раскрыв квадрат разности, после упрощения можно получить, что

$$x = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ или } x^2 = \frac{3a^2}{8}.$$

В соответствии с теоремой косинусов для $\triangle BDO$:

$$a^2 = x^2 + x^2 - 2\cdot x\cdot x\cdot \cos\alpha$$

или

$$a^2 = 2x^2 - 2x^2\cdot\cos\alpha$$

Отсюда

$$\cos\alpha = \frac{2x^2 - a^2}{2x^2} = 1 - \frac{a^2}{2x^2} = 1 - \frac{a^2}{2\cdot\frac{3a^2}{8}} = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Вариант 2.

Рассмотрим куб с длиной ребра b и введём декартову систему координат так, чтобы одна вершина куба совпала с началом координат, а три ребра, сходящиеся в этой вершине, лежали на координатных осях, причём в области их положительных значений (рис. 4). Выберем четыре вершины куба A, B, C, D и соединим их отрезками (диагоналями граней куба) так, как это показано на рисунке. Поскольку все грани куба – равные между собой квадраты, то диагонали граней также равны между собой ($AB = AC = AD = BC = BD = CD$), из чего следует, что тело $ABCD$ является правильным тетраэдром.

Пусть точка O – центр симметрии куба, следовательно она равноудалена от его вершин и граней. Это означает, что она равноудалена и от вершин тетраэдра $ABCD$, то есть является точкой пересечения его высот. Обозначим $\angle BOD$ как α и найдём cos α.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OD}$. Так как точки B, D, O имеют координаты

$$B\,(b;\,0;\,b)$$
$$D\,(0;\,b;\,b)$$
$$O\left(\frac{b}{2};\frac{b}{2};\frac{b}{2}\right)$$

соответственно, то у названных векторов координаты будут следующими:

$$\overrightarrow{OB}\left(\frac{b}{2};-\frac{b}{2};\frac{b}{2}\right),\ \overrightarrow{OD}\left(-\frac{b}{2};\frac{b}{2};\frac{b}{2}\right).$$

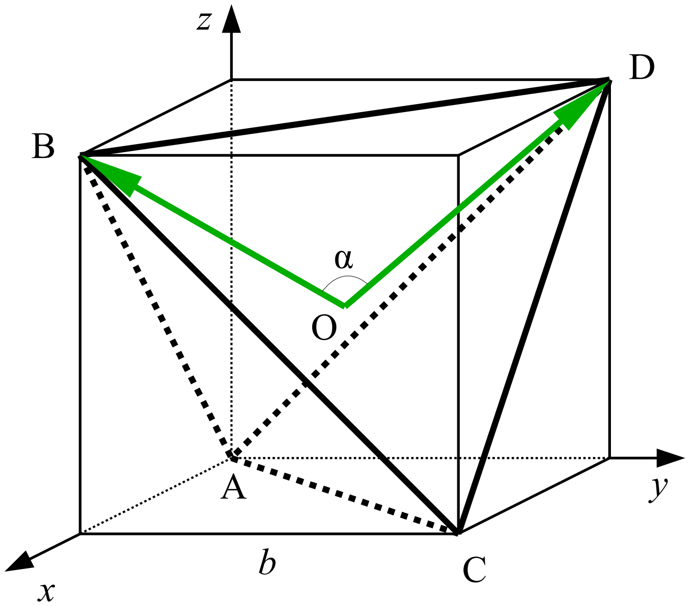

Рис. 4.

Угол между этими векторами есть $\angle BOD$, его косинус (cos α) можно найти из длин векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OD}$ и их скалярного произведения:

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}}{|\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{OD}|}=\frac{\frac{b}{2}\cdot\left(-\frac{b}{2}\right)+\left(-\frac{b}{2}\right)\cdot\frac{b}{2}+\frac{b}{2}\cdot\frac{b}{2}}{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}}=\frac{-\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4}+\frac{b^2}{4}}{\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{b^2}{4}}\cdot\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{b^2}{4}}}=$$

$$=\frac{-\frac{b^2}{4}}{\left(\sqrt{3\cdot\frac{b^2}{4}}\right)^2}=\frac{-\frac{b^2}{4}}{3\cdot\frac{b^2}{4}}=-\frac{1}{3}.$$

О т в е т

$$-\frac{1}{3}$$

К о м м е н т а р и й

Задача имеет отношение к органической химии, а именно – к геометрии молекулы метана CH_4: центральное положение в ней занимает атом углерода в состоянии sp^3-гибридизации, из-за чего атомы водорода располагаются в вершинах правильного тетраэдра. Поэтому угол между направлениями связей С–Н там составляет величину $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\approx 109{,}47^{\circ}$, как раз и приводящуюся в учебниках.