

Школьные задачи / Геометрия / Г-2

Дано два равносторонних треугольника. При помощи циркуля и линейки построить третий равносторонний треугольник, площадь которого равна сумме площадей первых двух.

Решение

Рассмотрим сначала такой геометрический факт.

Как известно, площадь равностороннего треугольника S со стороной x выражается формулой:

$$S = x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

По теореме Пифагора для любого прямоугольного треугольника с катетами a и b и гипотенузой c :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Если домножить обе части этого равенства на $\frac{\sqrt{3}}{4}$, то получится:

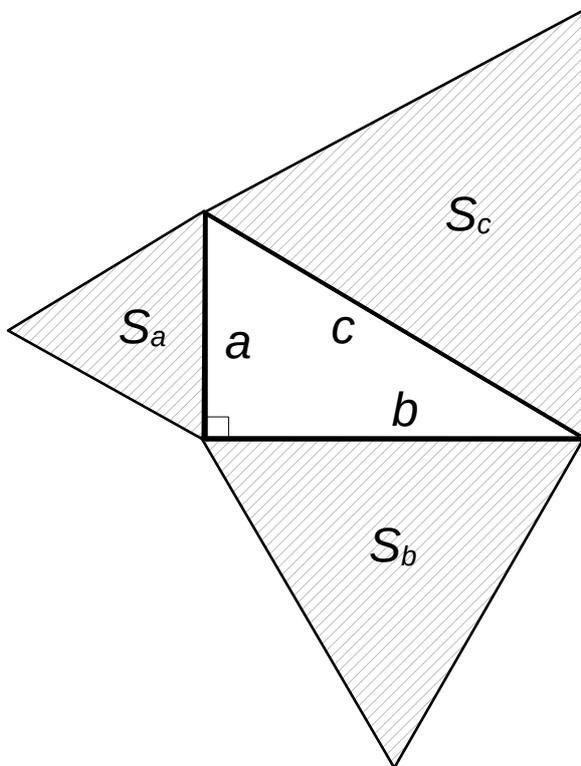
$$c^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + b^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

или

$$S_c = S_a + S_b,$$

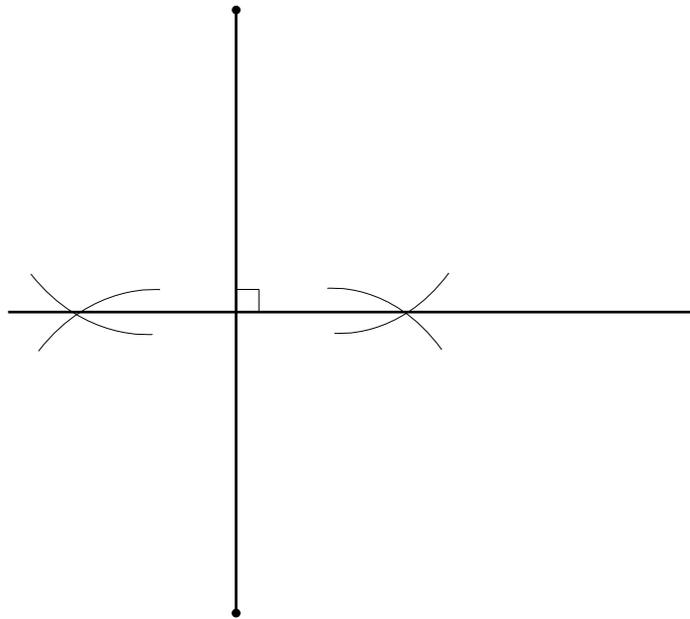
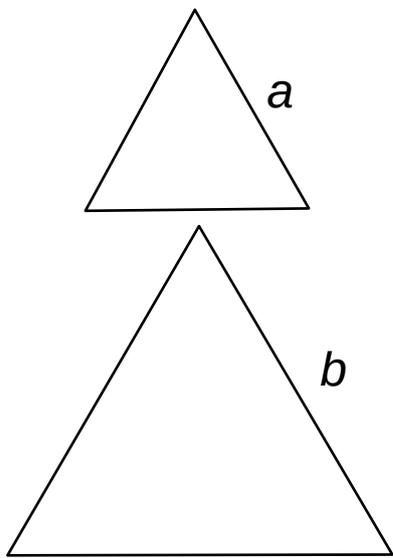
где S_a , S_b , S_c – площади равносторонних треугольников со сторонами a , b , c соответственно.

Из полученного равенства следует, что площадь равностороннего треугольника, построенного на гипотенузе (т. е. треугольника, сторона которого составляет длину гипотенузы), равна сумме площадей равносторонних треугольников, построенных на катетах:

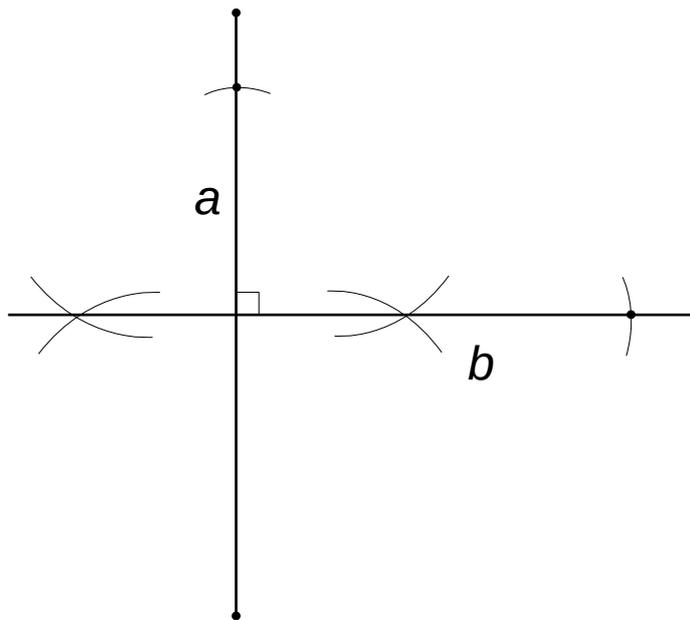
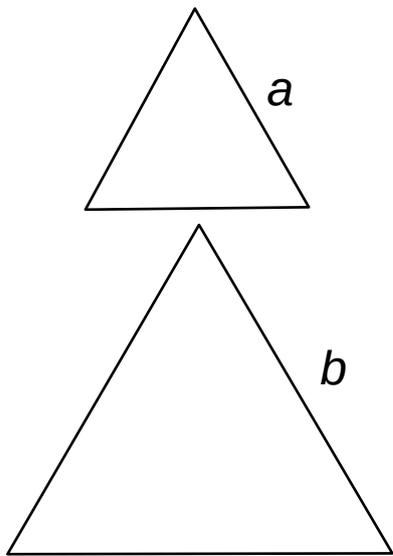


Из изложенного становится ясен алгоритм решения исходной задачи.

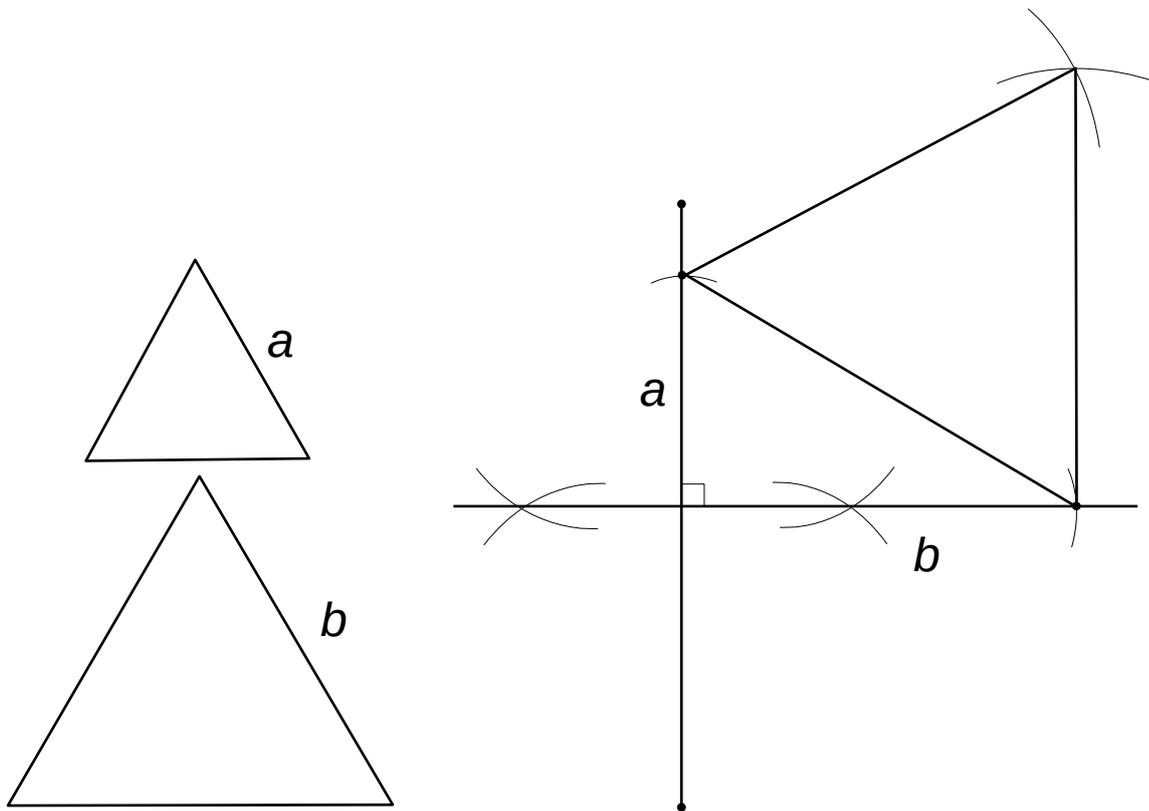
1. Пусть стороны двух данных равносторонних треугольников равны a и b . Берём произвольный отрезок и строим перпендикуляр к нему:



2. От точки пересечения с перпендикуляром на исходном отрезке отмечаем точку на расстоянии, равном a , а на самом перпендикуляре – на расстоянии, равном b :



3. Соединяем эти точки отрезком и на нём же строим равносторонний треугольник, который и будет искомым:



Комментарий

Геометрический смысл теоремы Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$ обычно формулируют как равенство суммы площадей квадратов, построенных на катетах, площади квадрата, построенного на гипотенузе. В данной задаче показано, что аналогичная ситуация справедлива и в отношении равносторонних треугольников, а в книге Перельмана Я.И. «Живая математика»¹ описан случай о соотношении площадей полукругов, построенных на сторонах прямоугольного треугольника.

© Широков Александр, 11.05.2020

¹ Перельман Я.И. «Живая математика». Чебоксары: РИО типографии № 1 по заказу ТОО «Арта». 1994. 200 с.