

Школьные задачи / Геометрия / Г-1

Доказать, что сумма синусов углов треугольника равна отношению периметра треугольника к диаметру описанной вокруг него окружности.

Р е ш е н и е

Рассмотрим треугольник $\triangle ABC$ со сторонами a, b, c и углами α, β, γ . Пусть R – радиус описанной вокруг треугольника окружности (рис. 1).

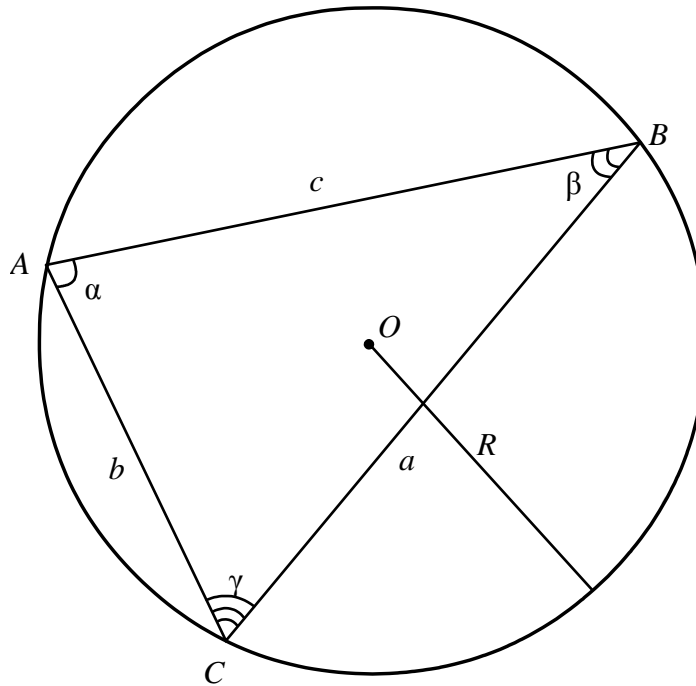


Рис. 1.

По теореме синусов и её следствию:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{2R}; \quad \sin \beta = \frac{b}{2R}; \quad \sin \gamma = \frac{c}{2R}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} = \frac{a+b+c}{2R}$$

Так как $2R = D$ (D – диаметр описанной окружности), то обозначив $a + b + c = P$ (P – периметр треугольника), получим что

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \frac{P}{D}$$

q.e.d.

© Широков Александр, 14.08.2019