Школьные задачи / Геометрия / Г-18

Доказать, что сумма частных производных объёма прямоугольного параллелепипеда по сторонам равна половине площади его поверхности.

Р е ш е н и е

Возьмём прямоугольный параллелепипед со сторонами длиной a, b и c. Если его объём, равный $V = abc$, рассматривать как функцию трёх переменных $V = V(a, b,$ c), то его частные производные будут таковы:

$$\frac{\partial V}{\partial a}=(V)'_a=(abc)'_a=bc\cdot(a)'_a=bc\cdot 1=bc\ ,$$

$$\frac{\partial V}{\partial b}=(V)'_b=(abc)'_b=ac\cdot(b)'_b=ac\cdot 1=ac\ ,$$

$$\frac{\partial V}{\partial c}=(V)'_c=(abc)'_c=ad\cdot(c)'_c=ab\cdot 1=ab\ .$$

Площадь поверхности S прямоугольного параллелепипеда равна сумме площадей всех его шести граней, которые являются прямоугольниками:

$$S = 2ab + 2bc + 2ac = 2\cdot(ab + bc + ac)$$

Сложим значения частных производных вместе и получим:

$$\frac{\partial V}{\partial a}+\frac{\partial V}{\partial b}+\frac{\partial V}{\partial c}=bc+ac+ab=\frac{2(ab+bc+ac)}{2}=\frac{S}{2}$$

q.e.d.

К о м м е н т а р и й

Предлагаемая задача выходит за рамки школьного курса математики, тем не менее мне она представляется вполне допустимой для старшеклассников по причинам, указанным в комментарии к аналогичному по содержанию заданию Г-13, поэтому оптимальным будет разбирать решение этой задачи вместе с учителем математики.

Не могу не отметить, что в результатах задач Г-13 и Г-18 легко просматривается любопытная общность. Для прямоугольника и прямоугольного параллелепипеда справедливы, соответственно, следующие равенства (P – периметр):

$$\frac{\partial S}{\partial a}+\frac{\partial S}{\partial b}=\frac{P}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial V}{\partial a}+\frac{\partial V}{\partial b}+\frac{\partial V}{\partial c}=\frac{S}{2}\ .$$

Попробую здесь сформулировать выражение, в равной степени относящееся, как в первому равенству, так и ко второму (математика ведь любит обобщения, правда?). Назовём сначала прямоугольник и прямоугольный параллелепипед «прямоугольными геометрическими объектами». Как известно, площадь плоской фигуры – это количественная мера некоторой части плоскости, т. е. двухмерного пространства (для простоты не будем брать во внимание существование понятия площади и для всяких криволинейных поверхностей типа сферических или конических), а объём тела – количественная мера некоторой части трёхмерного пространства. Далее, периметр можно назвать количественной мерой границы, отделяющей прямоугольник от остальной, внешней, части плоскости. Аналогично, площадь прямоугольного параллелепипеда можно назвать количественной мерой границы, отделяющей его от внешней части пространства. Таким образом, оба рассматриваемых равенства можно описать одной единой фразой: «Сумма частных производных количественной меры прямоугольного геометрического объекта по измерениям этого объекта равна половине количественной меры границы, отделяющей объект от остального пространства». Ох и витиевато, конечно, получилось. Может, кто-то сумеет лучше? Дерзайте!