Школьные задачи / Геометрия / Г-17

На плоскости дано два ненулевых вектора с координатами (c; c) и (c; c^2). Найти все действительные значения c, при которых угол между векторами будет равен 60°.

Решение

Обозначим вектор с координатами (c; c) как $\vec{a}$, а вектор с координатами (c; c^2) – как $\vec{b}$. Косинус угла между ними $\cos 60° = \frac{1}{2}$ можно найти из их скалярного произведения $\vec{a}\cdot\vec{b}$ и длин ($|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$):

$$\frac{1}{2}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \text{ или } 2\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

Исходя из условий задачи можно записать:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=c\cdot c+c\cdot c^2=c^2+c^3=c^2(c+1)$$
$$|\vec{a}|=\sqrt{c^2+c^2}=\sqrt{2c^2}$$
$$|\vec{b}|=\sqrt{c^2+(c^2)^2}=\sqrt{c^2+c^4}=\sqrt{c^2(1+c^2)}$$

Таким образом

$$2c^2(c+1)=\sqrt{2c^2}\cdot\sqrt{c^2(1+c^2)} \;\Leftrightarrow\; 2c^2(c+1)=\sqrt{2c^2\cdot c^2(1+c^2)} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; 2c^2(c+1)=\sqrt{2c^4(1+c^2)} \;\Leftrightarrow\; 2c^2(c+1)=c^2\cdot\sqrt{2(1+c^2)} \;\Leftrightarrow\; 2(c+1)=\sqrt{2(1+c^2)}$$

Последнее уравнение получается при делении обеих его частей на c^2 – это допустимо делать, так как по условию задачи $c \neq 0$ и потому не приведёт к потере корней.

Из самого уравнения следует ещё одно ограничение для c: правая его часть неотрицательна, значит и $2(c + 1) \geq 0$, отсюда $c \geq -1$. С учётом этого можно возвести обе части равенства в квадрат:

$$2^2\cdot(c + 1)^2 = 2(1 + c^2) \;\Leftrightarrow\; 2(c^2 + 2c + 1) = 1 + c^2 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; 2c^2 + 4c + 2 = 1 + c^2 \;\Leftrightarrow\; c^2 + 4c + 1 = 0$$

Решим получившееся уравнение методом выделения полного квадрата:

$$c^2 + 4c + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; c^2 + 4c + 1 + 3 = 3 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; c^2 + 2\cdot2\cdot c + 2^2 = 3 \;\Leftrightarrow\; (c + 2)^2 = 3 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; c + 2 = \pm\sqrt{3} \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} c_1=-2+\sqrt{3} \\ c_2=-2-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Корень c_2 не удовлетворяет критерию $c \geq -1$, в отличие от c_1, которое таким образом является единственным числом, соответствующим требованиям условий задачи.

Ответ

$c=\sqrt{3}-2$