Школьные задачи / Геометрия / Г-16

В трёхмерном пространстве заданы два ненулевых вектора с координатами ($-2c$; c; c) и (c; c^2; c^3). Найти все действительные значения c, при которых векторы будут взаимно перпендикулярны.

Решение

Угол между двумя взаимно перпендикулярными векторами равен 90°, а так как скалярное произведение векторов – это произведение их длин на косинус угла между ними, то оно для векторов ($-2c$; c; c) и (c; c^2; c^3) по условию задачи должно быть равно нулю. С другой стороны. скалярное произведение векторов с координатами (x_1; y_1; z_1) и (x_2; y_2; z_2) есть

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

Исходя из этого в случае векторов ($-2c$; c; c) и (c; c^2; c^3) необходимо, чтобы выполнялось следующее равенство:

$$-2c \cdot c + c \cdot c^2 + c \cdot c^3 = 0$$

или

$$c^4 + c^3 - 2c^2 = 0$$

Решим получившееся уравнение. Вынесем c^2 за скобку:

$$c^2 \cdot (c^2 + c - 2) = 0$$

Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю. Отсюда получается, что или $c = 0$, или $c^2 + c - 2 = 0$. Корни уравнения

$$c^2 + c - 2 = 0$$

несложно найти по теореме Виета, они равны $c_1 = -2$ и $c_2 = 1$.

По условию задачи векторы не являются нулевыми, значит вариант $c = 0$ не подходит и нужным требованиям отвечают значения $c_1 = -2$ и $c_2 = 1$, которым соответствуют две пары векторов:

1) (4; –2; –2) и (–2; 4; –8),
2) (–2; 1; 1) и (1; 1; 1).

Ответ

$c_1 = -2$, $c_2 = 1$.