

Школьные задачи / Геометрия / Г-15

На плоскости дано два ненулевых вектора с координатами $(c; c^2)$ и $(c; c^3)$. Найти все действительные значения c , при которых векторы будут взаимно перпендикулярны.

Решение

Взаимная перпендикулярность векторов означает, что угол между ними составляет 90° , а так как $\cos 90^\circ = 0$, то скалярное произведение таких векторов также будет равно нулю. Как известно, скалярное произведение векторов $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ равно сумме произведений их соответствующих координат:

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Исходя из этого в случае векторов $(c; c^2)$ и $(c; c^3)$ необходимо, чтобы выполнялось следующее равенство:

$$c \cdot c + c^2 \cdot c^3 = 0$$

или

$$c^2 + c^5 = 0$$

Решим получившееся уравнение. Вынесем c^2 за скобку:

$$c^2 \cdot (1 + c^3) = 0$$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Отсюда получается, что или $c = 0$, или $c^3 + 1 = 0$. Уравнение

$$c^3 + 1 = 0$$

имеет один действительный корень $c = -1$.

По условию задачи векторы не являются нулевыми, значит вариант $c = 0$ не подходит и остаётся единственное значение $c = -1$, при котором необходимое требование выполняется.

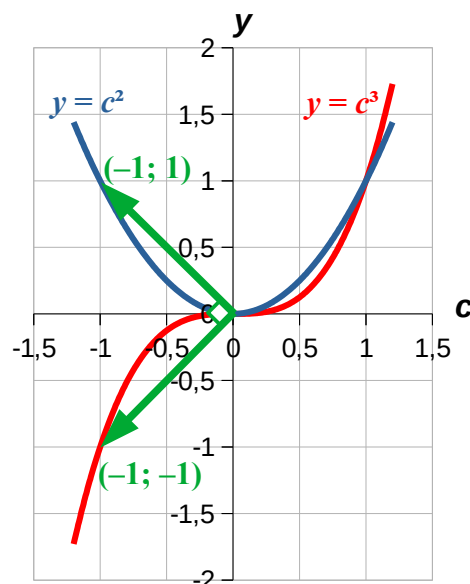
Ответ

$$c = -1$$

Комментарий

Множество концов векторов $(c; c^2)$ на координатной плоскости образует обычную (квадратичную) параболу $y = c^2$, а множество концов векторов $(c; c^3)$ есть геометрическое место всех точек кубической параболы $y = c^3$.

Из решения задачи следует, что её условию удовлетворяет единственная пара векторов: $(-1; (-1)^2)$ и $(-1; (-1)^3)$ или $(-1; 1)$ и $(-1; -1)$. Для наглядности они показаны на рисунке.



© Широков Александр, 05.01.2024