Школьные задачи / Геометрия / Г-15

На плоскости дано два ненулевых вектора с координатами $(c;\ c^2)$ и $(c;\ c^3)$. Найти все действительные значения c, при которых векторы будут взаимно перпендикулярны.

Р е ш е н и е

Взаимная перпендикулярность векторов означает, что угол между ними составляет 90°, а так как cos 90° = 0, то скалярное произведение таких векторов также будет равно нулю. Как известно, скалярное произведение векторов $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ равно сумме произведений их соответствующих координат:

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Исходя из этого в случае векторов $(c;\ c^2)$ и $(c;\ c^3)$ необходимо, чтобы выполнялось следующее равенство:

$$c \cdot c + c^2 \cdot c^3 = 0$$

или

$$c^2 + c^5 = 0$$

Решим получившееся уравнение. Вынесем c^2 за скобку:

$$c^2 \cdot (1 + c^3) = 0$$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Отсюда получается, что или $c = 0$, или $c^3 + 1 = 0$. Уравнение

$$c^3 + 1 = 0$$

имеет один действительный корень $c = –1$.

По условию задачи векторы не являются нулевыми, значит вариант $c = 0$ не подходит и остаётся единственное значение $c = –1$, при котором необходимое требование выполняется.

О т в е т

$c = –1$

К о м м е н т а р и й

Множество концов векторов $(c;\ c^2)$ на координатной плоскости образует обычную (квадратичную) параболу $y = c^2$, а множество концов векторов $(c;\ c^3)$ есть геометрическое место всех точек кубической параболы $y = c^3$.

Из решения задачи следует, что её условию удовлетворяет единственная пара векторов: $(–1;\ (–1)^2)$ и $(–1;\ (–1)^3)$ или $(–1;\ 1)$ и $(–1;\ –1)$. Для наглядности они показаны на рисунке.