Школьные задачи / Геометрия / Г-14

Для правильного октаэдра с длиной ребра a найти отношение производной его объёма по ребру к площади поверхности.

Решение

Рассмотрим трёхмерную декартову прямоугольную систему координат и на каждой из трёх координатных осей отметим по две точки, удалённых от начала координат на величину $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a$ ($a > 0$). На рис. 1 эти точки обозначены как A, B, C, D, E и F.

Отметим, что при этом получилось шесть равных между собой отрезков:

$$AO = OD = EO = OB = CO = OF = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a$$

Теперь соединим A, B, C, D, E и F отрезками так, как это показано на рис. 2. Получившийся при этом многогранник ABCDEF является октаэдром.

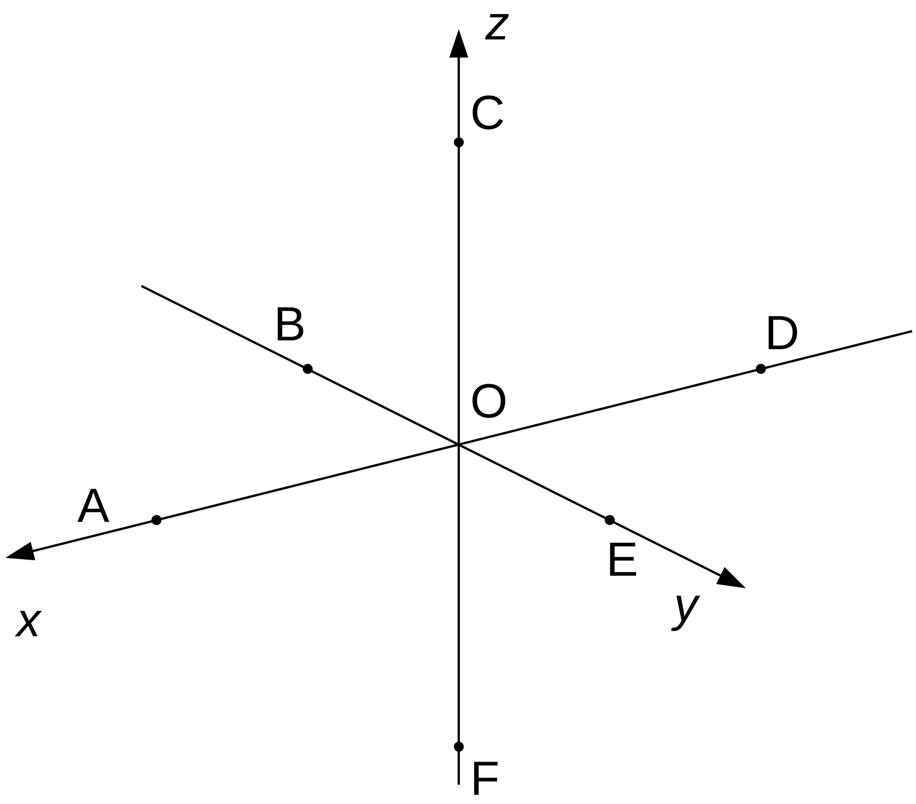

Рис. 1.

Рассмотрим $\triangle$AOE. Он равнобедренный (AO = EO) и прямоугольный (точки A и E лежат на разных координатных осях, которые перпендикулярны друг другу, поэтому $\angle$AOE – прямой). Таким образом, AE – гипотенуза, которая согласно теореме Пифагора равна

$$AE = \sqrt{AO^2 + EO^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}\cdot a^2 + \frac{2}{4}\cdot a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}} = \sqrt{a^2} = a$$

Аналогично доказывается, что все остальные рёбра октаэдра (к числу коих относится и AE) равны a, то есть равны между собой и следовательно октаэдр ABCDEF является правильным октаэдром, все восемь граней которого – равновеликие равносторонние треугольники. Площадь каждого из них составляет (см. задание Г-12)

$$S_{\triangle} = a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Отсюда площадь S всего октаэдра ABCDEF равна

$$S = 8\cdot S_{\triangle} = 8a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = a^2\cdot 2\sqrt{3}$$

Снова рассмотрим $\triangle$AOE. Из его равнобедренности и прямоугольности следует, что $\angle$OAE = 45°. Так как $\triangle$AOE = $\triangle$AOB (AO – общая их сторона, EO = OB, $\angle$AOB – прямой по той же причине, что и $\angle$AOE), то $\angle$OAB = 45°, а отсюда $\angle$EAB = 45° + 45° = 90°. Аналогично можно доказать, что $\angle$AED = 90°, из чего вытекает, что четырёхугольник AEDB является квадратом со стороной a, лежащим в координатной плоскости xOy.

Рассмотрим теперь пирамиды AEDBC и AEDBF. Они имеют общее квадратное основание, а, соответственно, отрезки OC и OF являются их высотами, так как лежат на оси аппликат Oz. Так как объём пирамиды равен трети произведения площади её основания на

Материал сайта shurichimik.narod.ru

высоту, то из равенства OC = OF следует, что объёмы пирамид AEDBC и AEDBF одинаковы, а объём V октаэдра ABCDEF равен, например, удвоенному объёму пирамиды AEDBC:

$$V = 2 \cdot V_{\text{AEDBC}} =$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a = a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Рассматривая объём октаэдра как функцию длины его ребра $V = V(a)$ найдём её производную:

$$V' = \left(a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}\right)' = 3a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = a^2 \cdot \sqrt{2}$$

Таким образом, спрашивающееся в задаче отношение будет равно:

$$\frac{V'}{S} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{2}}{a^2 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

О т в е т

$$\frac{\sqrt{6}}{6}$$

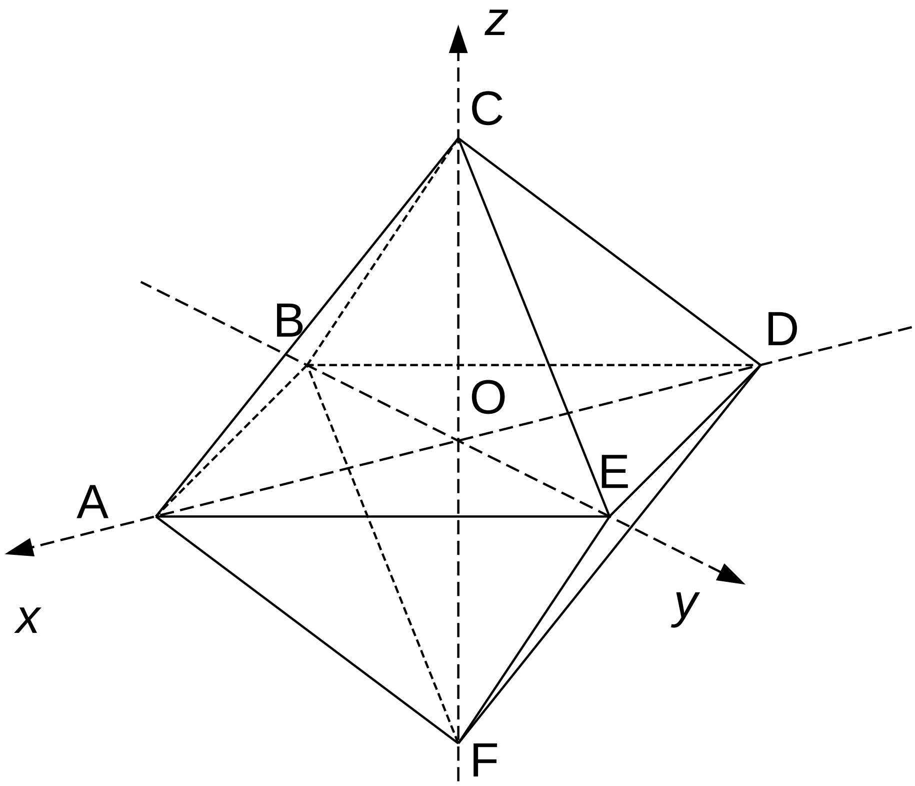

Рис. 2.

© Широков Александр, 04.12.2023

Материал сайта shurichimik.narod.ru