Школьные задачи / Геометрия / Г-13

Доказать, что сумма частных производных площади прямоугольника по его сторонам равна полупериметру этой фигуры.

Решение

Возьмём прямоугольник со сторонами длиной a и b. Если его площадь, равную $S = ab$, рассматривать как функцию двух переменных $S = S(a, b)$. то её частные производные будут таковы:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = (S)'_a = (ab)'_a = b \cdot (a)'_a = b \cdot 1 = b \ ,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = (S)'_b = (ab)'_b = a \cdot (b)'_b = a \cdot 1 = a \ .$$

Периметр P как сумма длин сторон прямоугольника равен

$$P = 2a + 2b = 2(a + b),$$

а полупериметр p соответственно будет

$$p = P/2 = a + b$$

Сложим значения частных производных и получим:

$$\frac{\partial S}{\partial a} + \frac{\partial S}{\partial b} = b + a = p$$

q.e.d.

Комментарий

Честно говоря, формулировка предложенной задачи выходит за рамки школьного курса, тем не менее я считаю такое задание и рассмотрение его решения вполне уместным по следующим причинам.

В школах с углублённым изучением математики ученикам вполне могут преподаваться некоторые темы из вузовской учебной программы – наверняка кое-кого из таких учащихся показанными «кракозябрами» уже ни удивить, ни напугать. Кроме этого, я не вижу ничего зазорного в том, чтобы любопытным ученикам на весьма простом примере продемонстрировать существование таких изучающихся студентами понятий, как «функция нескольких переменных», «дифференцирование функции нескольких переменных» и «частная производная». Школьник здесь довольно легко сможет обратить внимание на целый ряд вещей:

а) в математике понятие функции заметно шире, чем это обычно даётся в школе, и означает не только зависимость одной величины от другой, но и зависимость величины от нескольких других, между собой несвязанных;

б) для частных производных (то есть производных по какому-то одному аргументу) существуют разные формы записи – или как символическое отношение «скругленных дифференциалов», или с верхним штрихом и символом аргумента в нижнем индексе;

в) процесс нахождения частной производной функции несильно отличается от обычного знакомого старшеклассникам дифференцирования – если не вдаваться в строгие математические формулировки, то частная производная по какой-то конкретной переменной находится как и обычная, просто при этом другие переменные (аргументы функции) считаются постоянными величинами – поэтому их, как показано в разобранной задаче, и можно выносить за знак производной как константу.