Школьные задачи / Геометрия / Г-12

Дан правильный тетраэдр с ребром, равным a. Найти отношение производной его объёма по длине ребра к площади поверхности.

Р е ш е н и е

Правильный тетраэдр имеет четыре грани, которые являются равновеликими равносторонними треугольниками. Ранее в задаче Г-9 была получена формула для площади правильного n-угольника со стороной a:

$$S_n = a^2 \cdot \frac{n}{4} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$$

Для правильного (равностороннего) треугольника она перепишется так:

$$S_\triangle = a^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = a^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Отсюда площадь правильного тетраэдра будет

$$S = 4 \cdot S_\triangle = 4\,a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = a^2 \cdot \sqrt{3}$$

Тетраэдр можно рассматривать как пирамиду с треугольным основанием, поэтому его объём равен трети произведения высоты на площадь основания. В разобранной ранее задаче Г-3 было показано, что высота правильного тетраэдра h выражается через длину его ребра a так:

$$h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Из этого следует, что объём правильного тетраэдра есть

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_\triangle \cdot h = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}$$

Рассматривая V как функцию от a, найдём её производную:

$$V' = \left(a^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}\right)' = 3\,a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Таким образом, спрашивающееся в задаче отношение будет равно:

$$\frac{V'}{S} = \frac{a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}}{a^2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

О т в е т

$$\frac{\sqrt{6}}{12}$$