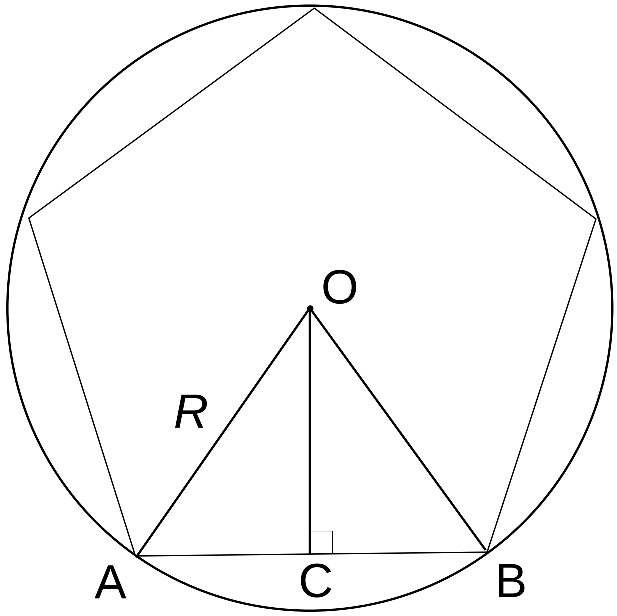
Школьные задачи / Геометрия / Г-10

Вокруг правильного многоугольника с числом сторон n описана окружность радиусом R. Найти предел отношения производной площади многоугольника S по радиусу R описанной окружности к периметру P этого многоугольника при бесконечном увеличении n:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{dS}{dR}\cdot\frac{1}{P}\right)$$

Р е ш е н и е



Выразим через радиус описанной окружности площадь S данного в задаче многоугольника. Для этого разделим его на n треугольников, таких, чтобы одна вершина каждого треугольника являлась центром описанной окружности, а две другие были вершинами многоугольника, принадлежащими одной его стороне. Все полученные треугольники будут равны друг другу по трём сторонам (две из них – радиусы описанной окружности, а третья – это сторона самого многоугольника).

Найдём площадь одного из таких треугольников – рассмотрим $\triangle$AOB (см. рисунок). В нём $\angle$AOB равен 360°/n или в радианной мере

$$\angle \mathrm{AOB}=\frac{2\pi}{n}$$

Площадь $\triangle$AOB можно найти по двум его сторонам и синусу угла между ними:

$$S(\triangle \mathrm{AOB})=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{OA}\cdot \mathrm{OB}\cdot\sin(\angle \mathrm{AOB})=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot R\cdot R\cdot\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{R^2}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$$

Поскольку $S = n\cdot S(\triangle \mathrm{AOB})$, то получаем следующую формулу для площади правильного n-угольника:

$$S=R^2\cdot\frac{n}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$$

Рассматривая площадь как функцию радиуса $S = S(R)$, найдём её производную:

$$\frac{dS}{dR}=\frac{d}{dR}\left(R^2\cdot\frac{n}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\right)=\frac{n}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{d}{dR}(R^2)=$$

$$=\frac{n}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdot 2R=nR\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$$

(множитель $n/2\cdot\sin(2\pi/n)$ не зависит от R, поэтому при дифференцировании выносится за знак производной как постоянный коэффициент).

Для нахождения периметра многоугольника $P = n\cdot$AB необходимо выразить AB через R. Для этого в $\triangle$AOB из вершины O опустим на сторону AB высоту OC. Так как $\triangle$AOB – равнобедренный (OA = OB = R), то OC будет являться медианой для AB (AC = CB) и биссектрисой $\angle$AOB, из чего следует, что:

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} + \mathrm{CB} = 2\mathrm{AC}$$

$$\angle \mathrm{AOC}=\frac{1}{2}\cdot\angle \mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{n}=\frac{\pi}{n}$$

Так как $\triangle$AOC – прямоугольный, то величину AC можно найти через гипотенузу OA и синус противолежащего угла $\angle$AOC:

$$AC = OA\cdot\sin(\angle AOC)$$

Таким образом получаем:

$$P = n\cdot AB = n\cdot 2AC = 2n\cdot OA\cdot\sin(\angle AOC) = 2nR\cdot\sin(\pi/n)$$

Рассмотрим теперь отношение производной площади многоугольника по радиусу описанной окружности к периметру этого многоугольника:

$$\frac{\frac{dS}{dR}}{P} = \frac{dS}{dR}\cdot\frac{1}{P} = \frac{nR\cdot\sin\frac{2\pi}{n}}{2nR\cdot\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{2\sin\frac{\pi}{n}} =$$

$$= \frac{\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{n}\right)}{2\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{n}\cdot\cos\frac{\pi}{n}}{2\sin\frac{\pi}{n}} = \cos\frac{\pi}{n}$$

(при выполнении преобразований использовано тригонометрическое тождество для синуса двойного угла). Теперь остаётся лишь найти предел у полученного отношения при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{dS}{dR}\cdot\frac{1}{P}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{n}\right) = \cos\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) = \cos 0 = 1$$

О т в е т

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{dS}{dR}\cdot\frac{1}{P}\right) = 1$$

К о м м е н т а р и й

Производная площади круга по радиусу есть длина ограничивающей этот круг окружности $L = 2\pi R$.

$$\frac{dS_{\text{круга}}}{dR} = \frac{d\left(\pi R^2\right)}{dR} = \pi\frac{d\left(R^2\right)}{dR} = \pi\cdot 2R = L$$

Отсюда следует, что отношение производной площади круга по радиусу к длине окружности строго равно единице. Это согласуется с полученным в задаче ответом в том смысле, что при бесконечном возрастании числа сторон n многоугольник также вырождается в окружность и его периметр P становится её длиной L.