

Школьные задачи / Физика / Ф-4

Когда астрономы определили массы и размеры Земли и Луны, встал вопрос о том, почему средние плотности планеты и спутника так различаются – у Луны эта величина оказалась заметно меньшей. Одной из попыток объяснения данного факта была гипотеза (ныне отвергнутая научным сообществом из-за своей несостоятельности), что Луна полая внутри, хотя и состоит из такого же вещества, что и Земля.

Исходя из фантастического предположения, что внутри Луны действительно есть одна большая сферическая и совершенно пустая полость и считая среднюю плотность вещества Луны равной средней плотности Земли, найдите радиус этой гипотетической полости (в % от лунного). Радиус Луны в 3,67 раз меньше земного, а её масса – в 81,3 раза меньше массы планеты.

Решение

По условию задачи массы и радиусы планеты (\oplus – Земля) и спутника (\lrcorner – Луна) соотносятся следующим образом:

$$X = \frac{R_{\oplus}}{R_{\lrcorner}} = 3,67, \quad Y = \frac{m_{\oplus}}{m_{\lrcorner}} = 81,3$$

Средняя плотность ρ Земли равна

$$\rho = \frac{m_{\oplus}}{V_{\oplus}} = \frac{m_{\oplus}}{\frac{4}{3} \pi R_{\oplus}^3}$$

Пусть V – полный объём Луны, а V_0 – объём полости внутри неё, тогда $(V - V_0)$ – объём вещества Луны. С учётом равенства его плотности ρ , масса спутника может быть выражена следующим образом:

$$m_{\lrcorner} = \rho \cdot (V - V_0) = \frac{m_{\oplus}}{\frac{4}{3} \pi R_{\oplus}^3} \cdot \left(\frac{4}{3} \pi R_{\lrcorner}^3 - \frac{4}{3} \pi R_0^3 \right) = \frac{m_{\oplus}}{\frac{4}{3} \pi R_{\oplus}^3} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (R_{\lrcorner}^3 - R_0^3) = \frac{m_{\oplus}}{R_{\oplus}^3} \cdot (R_{\lrcorner}^3 - R_0^3),$$

где R_0 – радиус полости. С учётом известных соотношений масс и радиусов планеты и спутника получаем:

$$m_{\lrcorner} = \frac{Y m_{\lrcorner}}{X^3 R_{\lrcorner}^3} \cdot (R_{\lrcorner}^3 - R_0^3)$$

Сокращая массу Луны и заводя куб радиуса Луны в скобки имеем:

$$1 = \frac{Y}{X^3} \cdot \left(1 - \frac{R_0^3}{R_{\lrcorner}^3} \right)$$

В задаче требуется найти, какую долю радиус полости составляет от радиуса Луны. Для удобства обозначим эту величину как k :

$$k = \frac{R_0}{R_{\lrcorner}}$$

Таким образом

$$1 = \frac{Y}{X^3} \cdot (1 - k^3)$$

Решая это уравнение получаем:

$$1 = \frac{Y}{X^3} \cdot (1 - k^3) \Leftrightarrow \frac{X^3}{Y} = 1 - k^3 \Leftrightarrow k^3 = 1 - \frac{X^3}{Y} \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{1 - \frac{X^3}{Y}}$$

Остаётся подставить в полученную формулу численные данные:

$$k = \sqrt[3]{1 - \frac{X^3}{Y}} = \sqrt[3]{1 - \frac{3,67^3}{81,3}} \approx 0,732 = 73,2\%$$

О т в е т

73,2%

Комментарий

Средние плотности Земли и Луны (5518 кг/м^3 и 3340 кг/м^3 соответственно), о которых упоминается в условии задачи, несложно найти в справочнике* – отсюда же были взяты значения масс и радиусов. С учётом среднего радиуса Луны (1737 км) получается, что радиус предполагаемой полости внутри неё должен составлять $1737 \cdot 0,732 \approx 1270 \text{ км}$. Существой такая пустота внутри нашего спутника на самом деле, прочности слагающих его пород не хватило бы для противостояния собственной же гравитации и Луна неизбежно обрушилась бы внутрь самой себя («схлопнулась»), став более компактным, но при этом сплошным телом.

На сегодняшний день состав и внутреннее строение естественного спутника Земли рассматриваются неотъемлемо от истории его образования. С учётом всего накопленного комплекса данных, в том числе – результатов анализа образцов лунных пород, доставленных в земные лаборатории американскими космонавтами и советскими автоматическими станциями, ныне доминирующей является гипотеза, объясняющая возникновение Луны как результат произошедшего на заре формирования Солнечной системы катастрофического столкновения прото-Земли с Тейей – гипотетическим небесным телом (планетезималью). Подробнее об этом можно узнать на интересном ютуб-канале «Космос просто», видеоролик на котором с названием «Странная история теории искусственной Луны»** меня и вдохновил на формулировку предложенной выше задачи.

© Широков Александр, 18.04.2024

* Енохович А.С. Справочник по физике. М.: Просвещение, 1978. – 415 с.

** URL: <https://www.youtube.com/watch?v=aygSTOGCn8M>