Школьные задачи / Физика / Ф-3

По некоторой траектории движется материальная точка. Доказать, что производная её кинетической энергии по скорости равна её импульсу.

Решение

Кинетическая энергия E_k для материальной точки с массой m, движущейся со скоростью v, выражается равенством:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Рассматривая кинетическую энергию как функцию скорости, найдём её производную:

$$(E_k)'_v = \left(\frac{mv^2}{2}\right)'_v \underbrace{=\frac{m}{2}\cdot(v^2)'_v}_{(а)} \underbrace{=\frac{m}{2}\cdot 2v}_{(б)} \underbrace{=mv=p}_{(в)}$$

Здесь: (а) – масса m считается постоянной, поэтому её и число 2 в знаменателе выносим за знак производной; (б) – находим производную функции v^2 по v и сокращаем получившиеся в числителе и в знаменателе двойки; (в) – импульс p по определению равен произведению массы на скорость.

Таким образом приведённые несложные выкладки показывают, что производная кинетической энергии по скорости действительно равна импульсу, а это и требовалось доказать.

Комментарий

В вузовских курсах математики и физики производные чаще записываются иначе, чем это принято в школе – как отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента. В таких обозначениях в задаче требуется доказать равенство

$$\frac{dE_k}{dv} = p$$

Ход решения же может быть записан так:

$$\frac{dE_k}{dv} = \frac{d\left(\frac{mv^2}{2}\right)}{dv} = \frac{m}{2}\cdot\frac{d\left(v^2\right)}{dv} = \frac{m}{2}\cdot 2v = mv = p$$