Школьные задачи / Алгебра / А-9

Решите уравнение:

$$\cos^4 x - 1\,111\cdot\cos^3 x - 112\,110\cdot\sin^2 x - 1\,111\,000\cdot\cos x + 1\,112\,110 = 0$$

Р е ш е н и е

В исходном уравнении помимо функции косинуса фигурирует синус, возведённый в квадрат – заменим его, воспользовавшись тригонометрическим тождеством. Получим:

$$\cos^4 x - 1\,111\cdot\cos^3 x - 112\,110\cdot(1 - \cos^2 x) - 1\,111\,000\cdot\cos x + 1\,112\,110 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^4 x - 1\,111\cdot\cos^3 x - 112\,110 + 112\,110\cdot\cos^2 x - 1\,111\,000\cdot\cos x + 1\,112\,110 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^4 x - 1\,111\cdot\cos^3 x + 112\,110\cdot\cos^2 x - 1\,111\,000\cdot\cos x + 1\,000\,000 = 0$$

Сделаем замену переменных, обозначив $\cos x = t$, тогда уравнение запишется в виде:

$$t^4 - 1\,111\cdot t^3 + 112\,110\cdot t^2 - 1\,111\,000\cdot t + 1\,000\,000 = 0$$

Свободный член получившегося уравнения четвёртой степени (1 000 000) представляет собой произведение всех его четырёх корней (в общем случае – комплексных). Попробуем всё же отыскать некоторые корни среди целых множителей свободного члена, хотя даже их вариантов видится довольно много ($1\,000\,000 = 1\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5$).

Легко заметить, что единица является решением ($t_1 = 1$). Действительно, при подстановке её вместо t ($t^4 = t^3 = t^2 = 1$) получается верное равенство:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{1 - 1\,111}_{-1\,110} + 112\,110}_{111\,000} - 1\,111\,000}_{-1\,000\,000} + 1\,000\,000}_{0} = 0$$

На основании этого поделим соответствующий полином четвёртой степени на $t - 1$ «столбиком»:

$$\begin{array}{l|l}
t^4 - 1111t^3 + 112110t^2 - 1111000t + 1000000 & t - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{t^4 - t^3} & t^3 - 1110t^2 + 111000t - 1000000 \\
\quad -1110t^3 + 112110t^2 & \\
\quad \underline{-1110t^3 + \quad 1110t^2} & \\
\qquad\qquad 111000t^2 - 1111000t & \\
\qquad\qquad \underline{111000t^2 - \quad 111000t} & \\
\qquad\qquad\qquad -1000000t + 1000000 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-1000000t + 1000000} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Попробуем найти хотя бы один корень у полученного кубического многочлена. Подстановки $t = \pm1, \pm2, \pm4, \pm5$ не подходят, а вот проверка $t_2 = 10$ показывает, что это число является корнем – поделим «столбиком» кубический многочлен на $t - 10$:

$$\begin{array}{r|l}
t^3-1110t^2+111000t-1000000 & t-10 \\ \cline{2-2}
\underline{t^3-\quad 10t^2} & t^2-1100t+100000 \\
-1100t^2+111000t & \\
\underline{-1100t^2+\ \ 11000t} & \\
100000t-1000000 & \\
\underline{100000t-1000000} & \\
0 &
\end{array}$$

Теперь остаётся решить квадратное уравнение:

$$t^2-1100t+100000=0$$

Его корни:

$$t_3=\frac{-(-1100)-\sqrt{(-1100)^2-4\cdot 1\cdot 100000}}{2\cdot 1}=\frac{1100-\sqrt{1210000-400000}}{2}=$$

$$=\frac{1100-\sqrt{810000}}{2}=\frac{1100-900}{2}=\frac{200}{2}=100$$

$$t_4=\frac{1100+900}{2}=\frac{2000}{2}=1000$$

Итак, уравнение четвертой степени имеет корни:

$$t_1=1;\ \ t_2=10;\ \ t_3=100;\ \ t_4=1000$$

Теперь пора вспомнить о сделанной замене переменных: t по сути – значение косинуса, которое по модулю не может превосходить единицу, следовательно, для нахождения нужных значений x приемлемым является лишь $t_1 = 1$. Таким образом, вернувшись к старой переменной, остаётся найти корни уравнения:

$$\cos x = 1,$$

которые будут следующими:

$$x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

О т в е т

$x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$