

## Школьные задачи / Алгебра / А-8

Решите уравнение:

$$3x|x| - 28 = 6\sqrt{3}$$

**Решение**

Прежде чем раскрывать модуль, стоит присмотреться повнимательнее к самому уравнению. Если предположить, что  $x < 0$ , то в этом случае произведение  $3x|x|$  обязательно будет отрицательным (так как модуль числа всегда положителен), а значит и  $3x|x| - 28 < 0$ , в то время как правая часть уравнения явно положительна. Отсюда следует, что исходное уравнение не может иметь отрицательных корней.

Простая подстановка  $x = 0$  также даёт понять, что ноль не является корнем уравнения. Следовательно, его решения имеет смысл искать только на множестве положительных чисел (то есть при  $x > 0$ ), но в этом случае  $|x| = x$  и уравнение преобразуется к виду:

$$3x^2 - 28 = 6\sqrt{3}$$

Для его решения перенесём вправо 28 и поделим обе части на 3. Получим:

$$x^2 = \frac{28 + 6\sqrt{3}}{3}$$

Отсюда:

$$x = \sqrt{\frac{28 + 6\sqrt{3}}{3}}$$

Полученное выражение необходимо упростить. Это можно сделать, если числитель дроби, стоящей под «большим» корнем, представить как разложение квадрата суммы. Разумеется, сначала хочется сделать это, используя разложение числа 6 на множители, чтобы яснее было «видно» удвоенное произведение:

$$28 + 6\sqrt{3} = 28 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}$$

Однако

$$3^2 + (\sqrt{3})^2 = 9 + 3 = 12 \neq 28$$

Данное обстоятельство вынуждает действовать иначе – внести число 3 под знак корня, получив тем самым под ним 27, благодаря чему становятся возможными следующие преобразования:

$$28 + 6\sqrt{3} = 28 + 2 \cdot 3\sqrt{3} = 28 + 2 \cdot \sqrt{27} = 27 + 1 + 2 \cdot \sqrt{27} \cdot 1 = (\sqrt{27})^2 + 2 \cdot \sqrt{27} \cdot 1 + 1^2 = (\sqrt{27} + 1)^2$$

Отсюда (в конце ещё выполнено избавление от иррациональности в знаменателе):

$$\sqrt{\frac{28 + 6\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{27} + 1)^2}{3}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{27} + 1)^2}}{\sqrt{3}} = \frac{|\sqrt{27} + 1|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{27} + 1}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}} = 3 + \frac{1}{\sqrt{3}} = 3 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Окончательно получаем, что исходное уравнение имеет единственный корень:

$$x = 3 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

**Ответ**

$$x = 3 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

© Широков Александр, 30.11.2022