Школьные задачи / Алгебра / А-7

Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют следующему набору условий:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2\le 8\cdot(|x|+|y|) \\ 20|x|+\sqrt{(y+20)\cdot|y+20|}\le 20 \end{array}\right.$$

Р е ш е н и е

Так как мы имеем объединение условий, заданных двумя неравенствами, то удобнее будет сначала построить отдельно множества точек, каждое из которых описывается лишь одним из предложенных выражений.

<u>По первому неравенству</u>

Проведём равносильные преобразования:

$$x^2+y^2\le 8\cdot(|x|+|y|)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ x^2+y^2\le 8\cdot(x+|y|)\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ x^2+y^2\le 8\cdot(-x+|y|)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y\ge 0\\ x^2+y^2\le 8\cdot(x+y)\end{cases}\\ \begin{cases}y<0\\ x^2+y^2\le 8\cdot(x-y)\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y\ge 0\\ x^2+y^2\le 8\cdot(-x+y)\end{cases}\\ \begin{cases}y<0\\ x^2+y^2\le 8\cdot(-x-y)\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge 0\\ x^2+y^2\le 8\cdot(x+y)\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0\\ y<0\\ x^2+y^2\le 8\cdot(x-y)\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ y\ge 0\\ x^2+y^2\le 8\cdot(-x+y)\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ y<0\\ x^2+y^2\le 8\cdot(-x-y)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge 0\\ x^2+y^2\le 8x+8y\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0\\ y<0\\ x^2+y^2\le 8x-8y\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ y\ge 0\\ x^2+y^2\le -8x+8y\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ y<0\\ x^2+y^2\le -8x-8y\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge 0\\ x^2-8x+y^2-8y\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0\\ y<0\\ x^2-2\cdot 4x+y^2+2\cdot 4y\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ y\ge 0\\ x^2+2\cdot 4x+16+y^2-2\cdot 4y+16\le 32\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ y<0\\ (x^2+2\cdot 4x+4^2)+(y^2+2\cdot 4y+4^2)\le(4\sqrt{2})^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge 0\\ (x-4)^2+(y-4)^2\le(4\sqrt{2})^2\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0\\ y<0\\ (x-4)^2+(y+4)^2\le(4\sqrt{2})^2\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ y\ge 0\\ (x+4)^2+(y-4)^2\le(4\sqrt{2})^2\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ y<0\\ (x+4)^2+(y+4)^2\le(4\sqrt{2})^2\end{cases}\end{array}\right.$$

В получившемся объединении четырёх систем первая описывает множество точек, расположенных в первом квадранте и находящихся в области, ограниченной окружностью с центром в точке (4; 4) и радиусом, равным $4\sqrt{2}$ (рис. 1):

$$(x-4)^2+(y-4)^2=(4\sqrt{2})^2$$

Аналогично выглядят множества точек, описывающиеся соответственно второй, третьей и четвёртой системами (рис. 2, 3, 4).

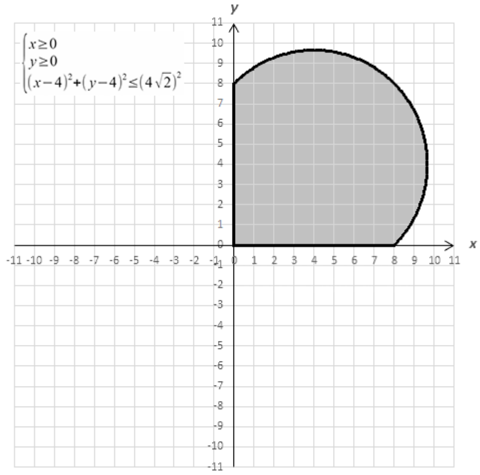


Рис. 1

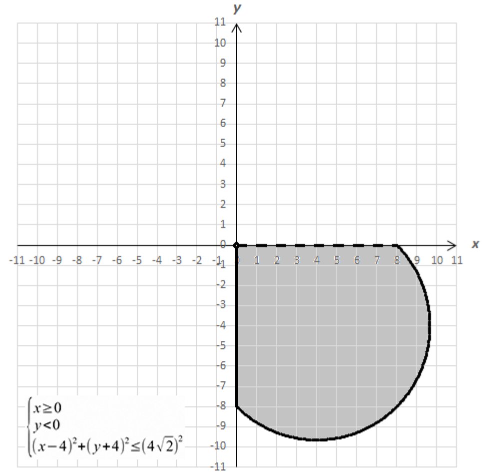


Рис. 2

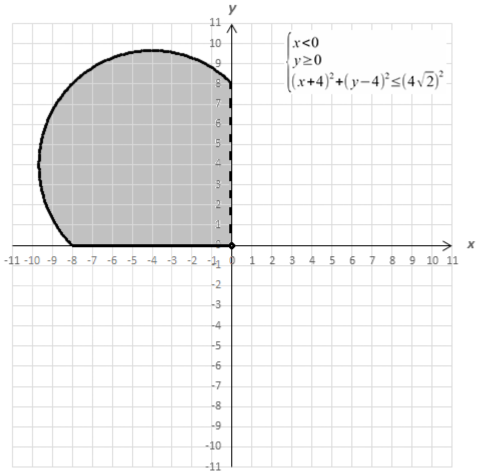


Рис. 3

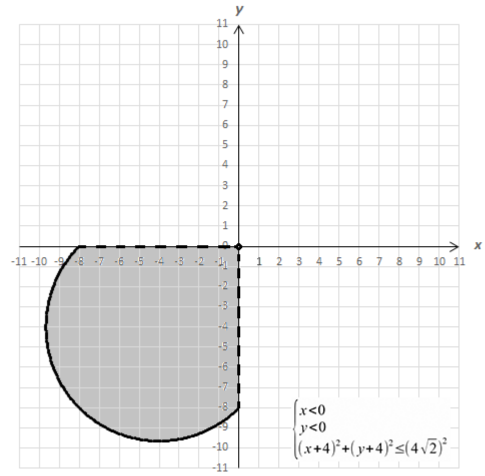


Рис. 4

Отсюда множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $x^2 + y^2 \le 8\cdot(|x| + |y|)$ является объединением приведённых выше областей и на координатной плоскости будет иметь вид фигуры, изображённой на рис. 5:

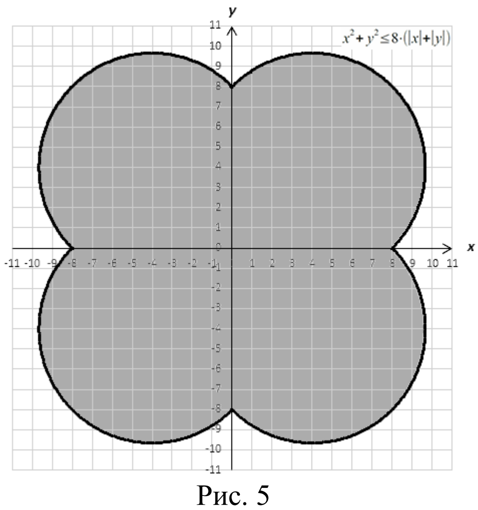


Рис. 5

<u>По второму неравенству</u>

Поскольку под корнем должно находиться положительное число, то из этого следует требование $y + 20 \ge 0$. Помня об этом, проведём с неравенством равносильные преобразования:

$$20|x|+\sqrt{(y+20)\cdot|y+20|}\le 20 \Leftrightarrow \begin{cases} y+20\ge 0 \\ 20|x|+\sqrt{(y+20)\cdot(y+20)}\le 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge -20 \\ 20|x|+\sqrt{(y+20)^2}\le 20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\ge -20 \\ 20|x|+y+20\le 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge -20 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 0 \\ 20x+y\le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ -20x+y\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge -20 \\ y\le -20x \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ y\ge -20 \\ y\le 20x \end{cases} \end{array}\right.$$

В полученном объединении двух систем первой из них описывается множество точек, расположенных в четвёртом квадранте и не выше графика функции $y=-20x$, у которых значение ординаты при этом не меньше –20 (рис. 6). На рис. 7 показана область точек, описываемая второй системой, а на рис. 8 – объединение рассматриваемых множеств.

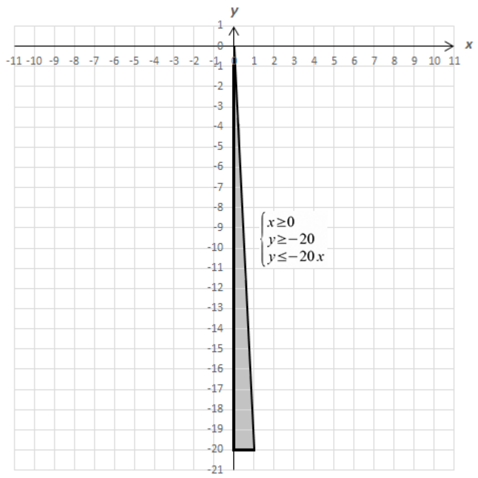


Рис. 6

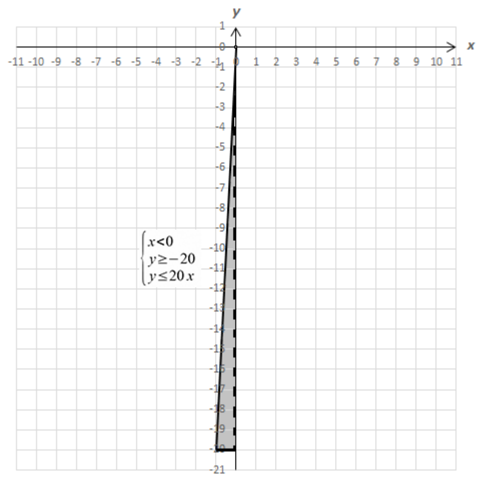


Рис. 7

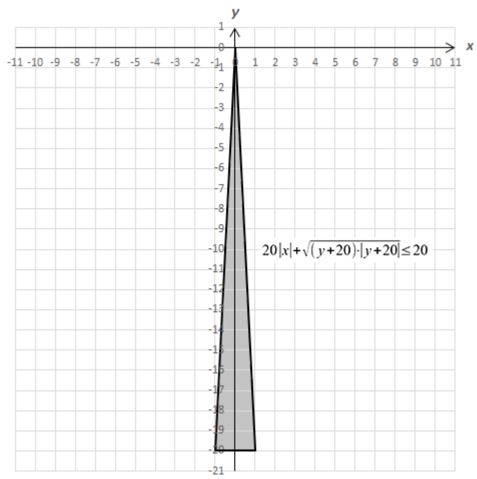
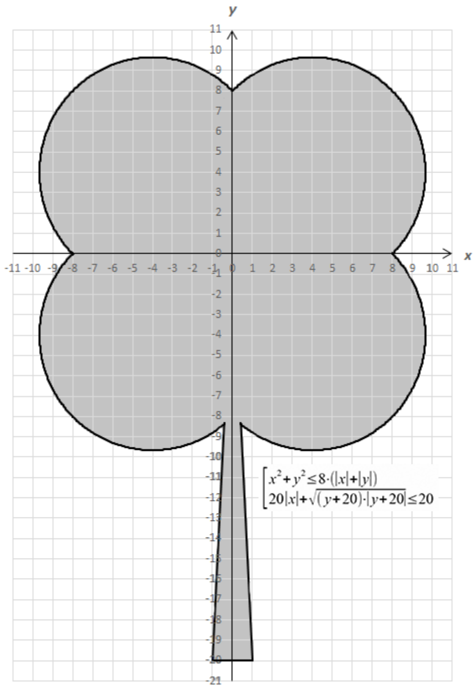


Рис. 8

Итоговое множество точек, описываемое данной в условии задачи парой неравенств, будет представлять собой объединение полученных выше фигур, внешне напоминающее четырёхлистный клевер.

О т в е т


y
x
$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2\le 8\cdot(|x|+|y|) \\ 20|x|+\sqrt{(y+20)\cdot|y+20|}\le 20 \end{array}\right.$