Школьные задачи / Алгебра / А-6

Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 9 \\ x^2-6x+y^2 \geqslant 7 \end{cases}$$

Р е ш е н и е

Рассмотрим сначала первое неравенство системы. Так как $9 = 3^2$, то выражение

$$x^2 + y^2 = 3^2$$

есть уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом, равным 3. Отсюда следует, что множество точек, координаты которых удовлетворяют первому неравенству системы, представляет собой область, включающую границу и внутреннюю часть соответствующего круга:

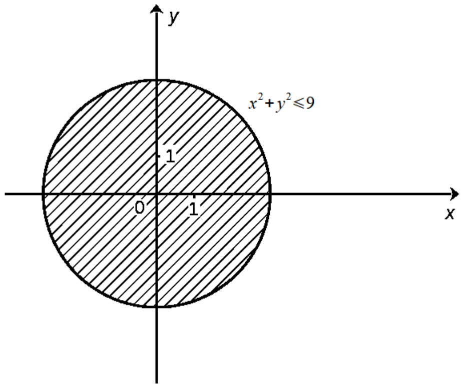


Рис. 1.

Теперь рассмотрим второе неравенство системы. Проведём с ним равносильные преобразования: добавим к обеим частям 9 и выделим полный квадрат разности:

$$x^2 - 6x + y^2 \geq 7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 9 + y^2 \geq 7 + 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 + y^2 \geq 16 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 \geq 4^2$$

Выражение

$$(x-3)^2 + y^2 = 4^2$$

представляет собой уравнение окружности с центром в точке $(3\,;0)$ и радиусом 4. Следовательно, точки координаты которых удовлетворяют второму неравенству системы располагаются на этой окружности и вне её:

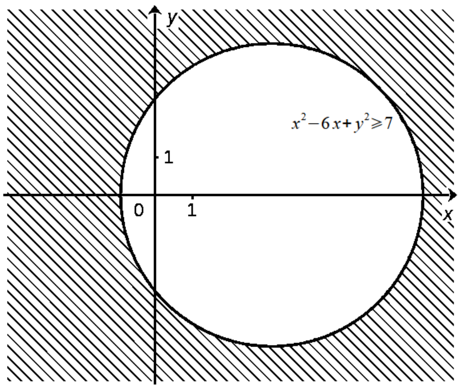


Рис. 2.

Искомое множество точек будет представлять собой пересечение двух предыдущих и образует серповидную фигуру:

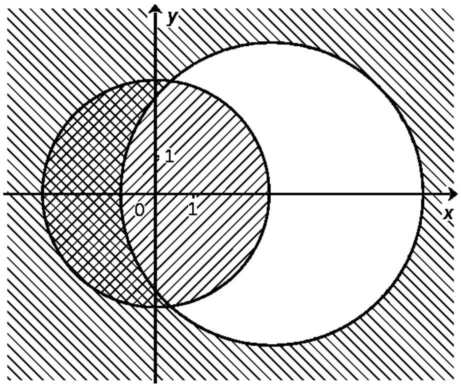
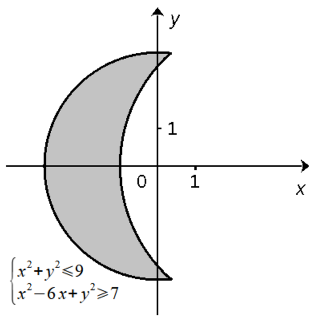


Рис. 3.

О т в е т



© Широков Александр, 02.12.2020