

Школьные задачи / Алгебра / А-5

Построить график функции:

$$y = ||x| - 1| - (|x| - 1)$$

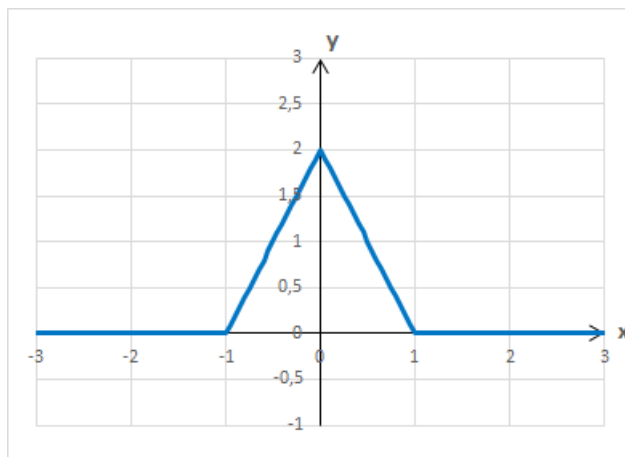
Решение

Для построения графика функции последовательно раскроем модули, рассмотрев случаи, когда стоящие под ними выражения имеют разные знаки. Для этого проведём следующие равносильные преобразования:

$$\begin{aligned}
 y = ||x| - 1| - (|x| - 1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = |x - 1| - (x - 1) \\ x < 0 \\ y = |-x - 1| - (-x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ y = x - 1 - x + 1 \\ x - 1 < 0 \\ y = -(x - 1) - (x - 1) \end{cases} \\ x < 0 \\ y = |x + 1| + x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ y = 0 \\ x < 1 \\ y = 2 - 2x \end{cases} \\ x < 0 \\ \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ y = x + 1 + x + 1 \\ x + 1 < 0 \\ y = -(x + 1) + x + 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 1 \\ y = 2 - 2x \end{cases} \\ x < 0 \\ \begin{cases} x \geq -1 \\ y = 2x + 2 \\ x < -1 \\ y = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ y = 0 \\ 0 \leq x < 1 \\ y = 2 - 2x \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x \geq -1 \\ y = 2x + 2 \\ x < -1 \\ y = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ y = 0 \\ 0 \leq x < 1 \\ y = 2 - 2x \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ y = 2x + 2 \\ x < -1 \\ y = 0 \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Как видно, график исходной функции, когда $x \leq -1$ или $x \geq 1$ представляет собой прямую линию, совпадающую с осью абсцисс, при этом на полуинтервале $0 \leq x < 1$ графиком является линия, задаваемая уравнением $y = 2 - 2x$, а на полуинтервале $-1 \leq x < 0$ это линия, которая описывается выражением $y = 2x + 2$. В целом график чем-то похож на остроконечную и широкополую шляпу, частенько изображающуюся художниками на головах у ведьм.

О т в е т



Комментарий

Существует такой метод исследования веществ – инфракрасная спектроскопия. В современных приборах для неё проводится довольно сложная математическая обработка регистрируемых сигналов, которая называется преобразованием Фурье. В процессе такой обработки дополнительно может использоваться процедура, именуемая аподизацией, для чего применяются специальные функции, которые в некотором интервале имеют отличные от нуля значения, а вне его – обращаются в ноль. Как видно из приведённой здесь задачи, подобную функцию вполне можно задать всего лишь одним математическим выражением – в данном случае (на основании вида полученного графика) такая аподизация называлась бы «треугольной».

© Широков Александр, 26.11.2020