Школьные задачи / Алгебра / А-3

Дана система неравенств:

$$\begin{cases} |y| \geq x^2 - 1 \\ |x| \geq y^2 - 1 \end{cases}$$

а) Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют данной системе.

б) Определите у получившейся фигуры координаты точек, наиболее удалённых от начала координат.

Р е ш е н и е

Изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют первому неравенству приведённой системы:

$$|y| \geq x^2 - 1$$

Рассмотрим случай $y \geq 0$, тогда

$$y \geq x^2 - 1$$

Точки, координаты которых удовлетворяют получившемуся условию, находятся не ниже параболы – графика функции $y = x^2 - 1$, что с учётом условия рассматриваемого случая ($y \geq 0$) выглядит следующим образом:

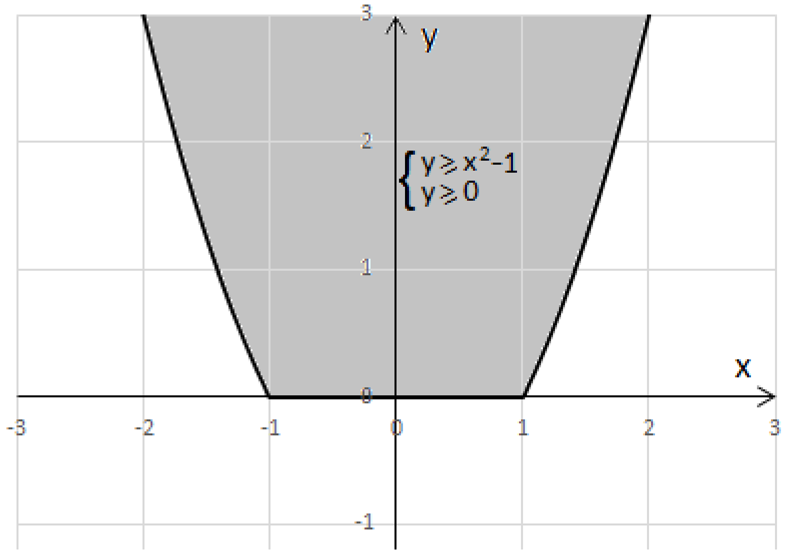

Рис. 1.

Теперь рассмотрим случай $y < 0$. Для него: $-y \geq x^2 - 1$ или

$$y \leq -x^2 + 1$$

Точки с координатами, соответствующими такому условию, находятся не выше параболы – графика функции $y = -x^2 + 1$, а с учётом условия $y < 0$ их совокупность выглядит так:

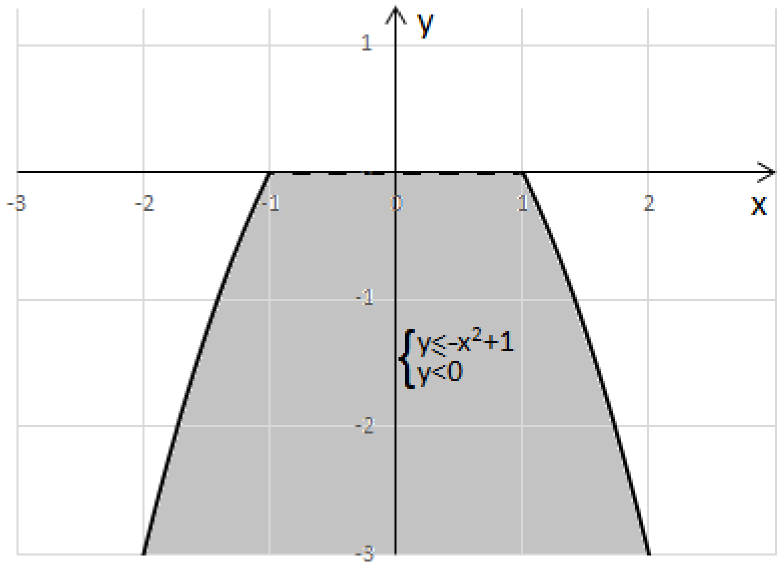

Рис. 2.

Множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|y| \geq x^2 - 1$ будет объединением рассмотренных двух случаев для разных знаков y:

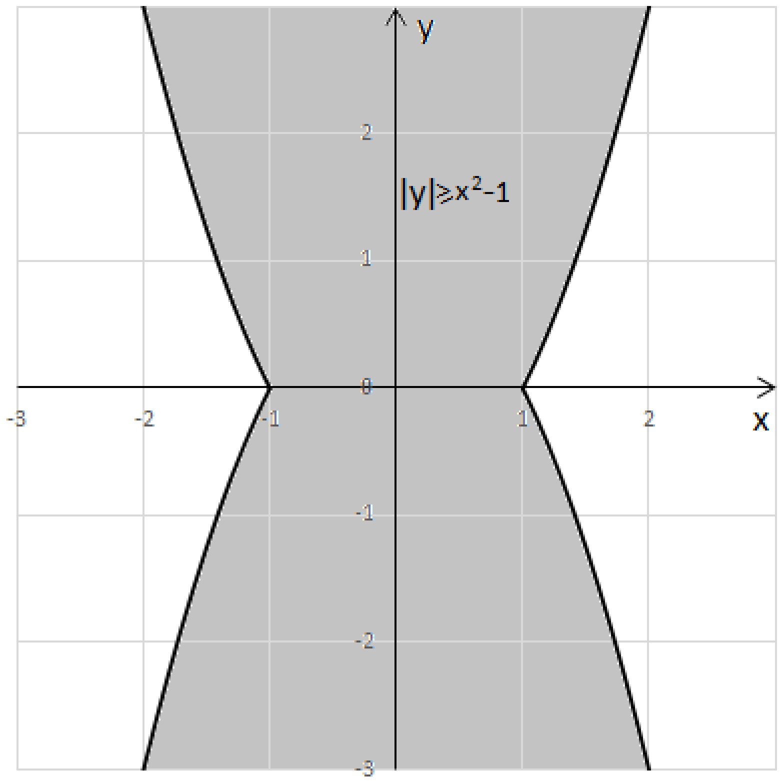

Рис. 3.

Точки, координаты которых подходят для второго неравенства исходной системы $|x| \geq y^2 - 1$ на координатной плоскости можно изобразить поворотом на 90° фигуры, изображённой на рис. 3:

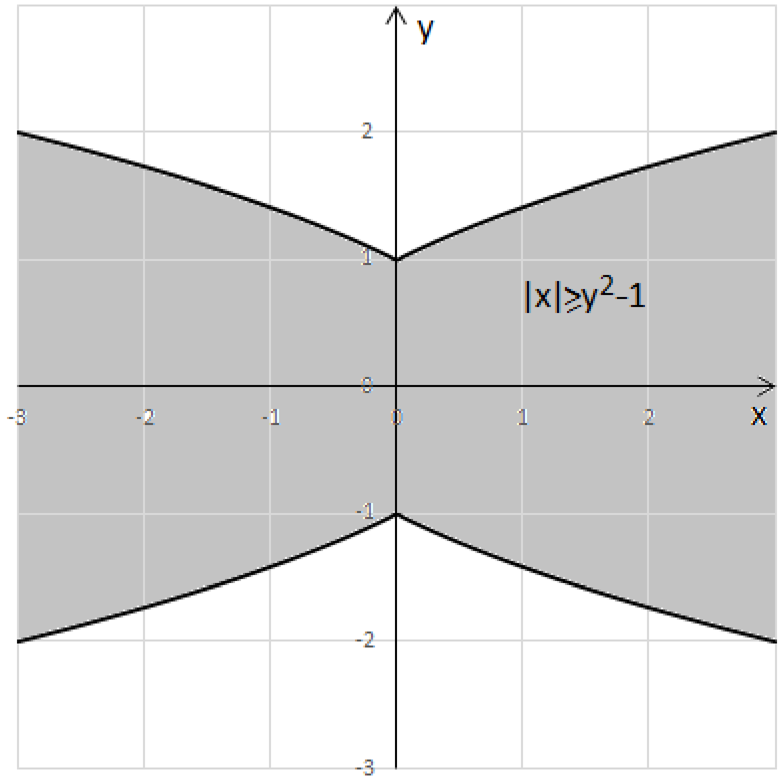

Рис. 4.

Окончательное решение задачи будет представлять собой пересечение двух изображённых выше множеств:

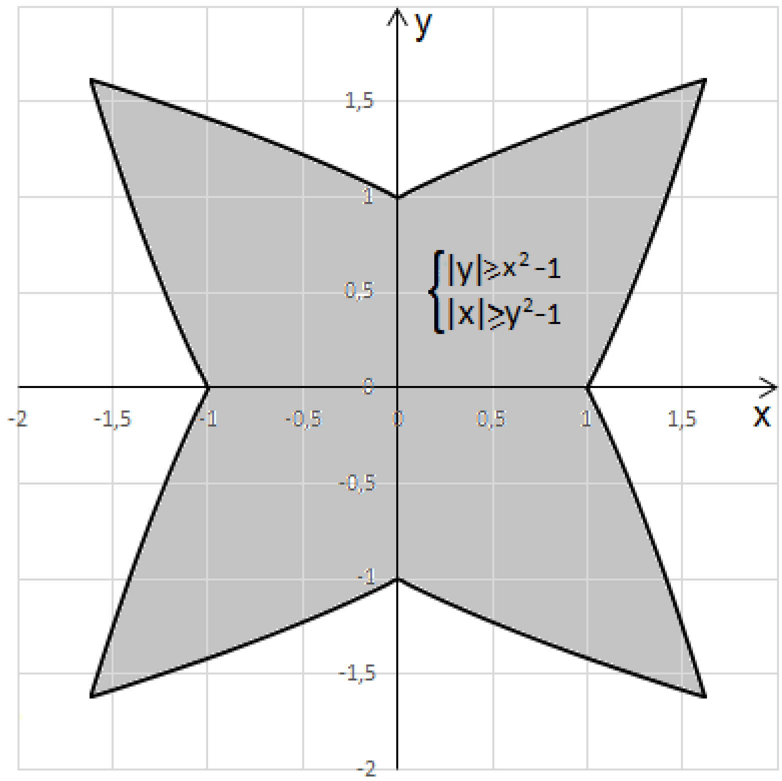

Рис. 5.

Нетрудно видеть, что получившаяся фигура представляет собой четырёхлучевую звезду и внешне напоминает метательное оружие – сюрикен. Очевидно, что самыми удалёнными от начала координат точками такой фигуры будут концы лучей «звезды». В силу того, что фигура симметрична относительно как одной, так и другой оси координат, то будет достаточно найти хотя бы координаты конца какого-нибудь одного луча, а далее, меняя знаки у абсциссы и ординаты такой точки, можно будет получить координаты остальных трёх точек-концов лучей. В силу сказанного будем искать координаты точки-конца луча, находящегося в первом квадранте. Они будут являться одним из решений следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ x = y^2 - 1 \end{cases}$$

Для решения этой системы подставим первое уравнение во второе:

$$x = (x^2 - 1)^2 - 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = x^4 - 2x^2 + 1 - 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = x^4 - 2x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\cdot(x^3 - 2x - 1) = 0$$

Множитель x вынесен за скобки, так как у получившегося уравнения четвёртой степени имеется очевидный корень $x_1 = 0$. Для нахождения других корней необходимо решить следующее кубическое уравнение:

$$x^3 - 2x - 1 = 0$$

Как известно, свободный член у подобных уравнений представляет собой произведение всех его корней, кроме того, один из этих корней для данного уравнения легко угадывается: $x_2 = -1$. Это означает, что многочлен $x^3 - 2x - 1$ делится на $x + 1$ без остатка. Выполним это деление «уголком»:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
- & x^3 & & -2x & -1 & x+1 \\
& x^3 & +x^2 & & & \overline{x^2-x-1} \\
\hline
- & & -x^2 & -2x & & \\
& & -x^2 & -x & & \\
\hline
- & & & -x & -1 & \\
& & & -x & -1 & \\
\hline
& & & & 0 &
\end{array}
$$

Таким образом:

$$x^3 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)\cdot(x^2 - x - 1) = 0$$

Теперь остаётся найти два оставшихся корня, решив квадратное уравнение:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

По формуле для нахождения его корней получаем:

$$x_{3,4} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Все значения x для системы уравнений известны, найдём соответствующие значения y:

$$x_1 = 0 \qquad\qquad y_1 = -1$$
$$x_2 = -1 \qquad\qquad y_2 = 0$$
$$x_3 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \qquad\qquad y_3 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$
$$x_4 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \qquad\qquad y_4 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Ниже на рисунке изображены графики уравнений системы, решения которой представляют точки пересечения двух парабол:

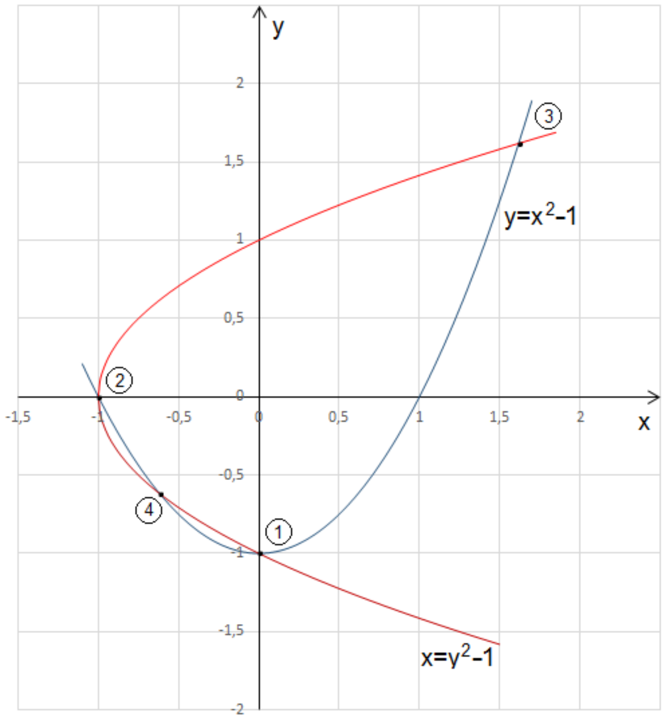

Рис. 6.

Как видно, в первом квадранте ветви парабол пересекаются в точке $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Следует отметить, что число $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ называется «золотым сечением» и обозначается греческой буквой φ («фи»). Таким образом самые удалённые от начала координат точки получившейся фигуры (четырёхлучевой звезды) будут такими: (φ; φ), (–φ; φ), (–φ; –φ), (φ; –φ).

О т в е т

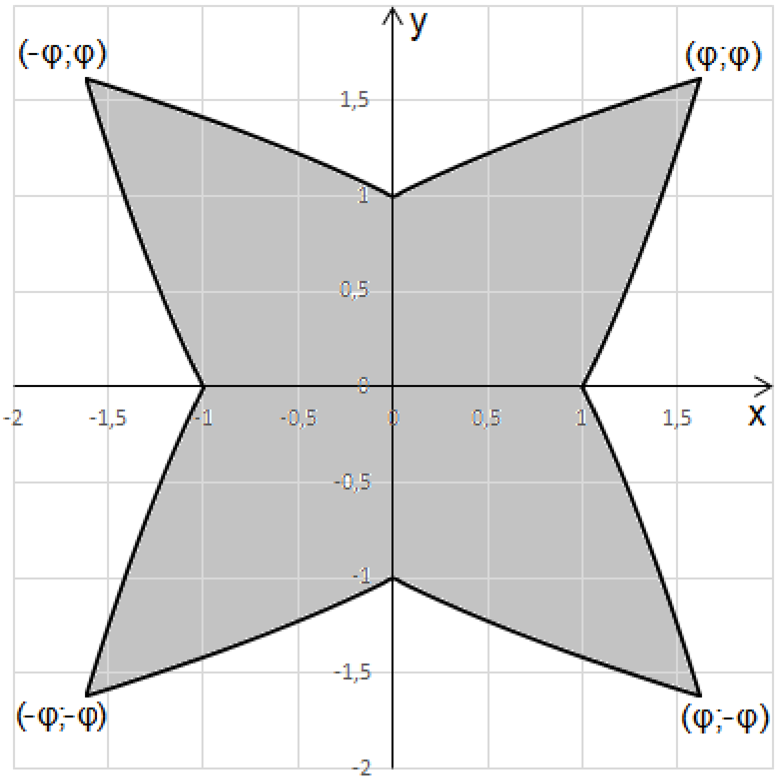

Рис. 7.

© Широков Александр, 16.08.2019