

## Школьные задачи / Алгебра / А-25

Построить график уравнения:

$$y^2 = \sin^4 x$$

Решение

Обе части уравнения неотрицательны, поэтому при извлечении квадратного корня из них также получится верное равенство (в конце приведённой цепочки преобразований для дальнейшего удобства применена формула понижения степени синуса):

$$y^2 = \sin^4 x \Leftrightarrow \sqrt{y^2} = \sqrt{\sin^4 x} \Leftrightarrow |y| = \sin^2 x \Leftrightarrow |y| = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2x$$

Рассмотрим два варианта: когда  $y \geq 0$  и когда  $y < 0$ .

1)  $y \geq 0$

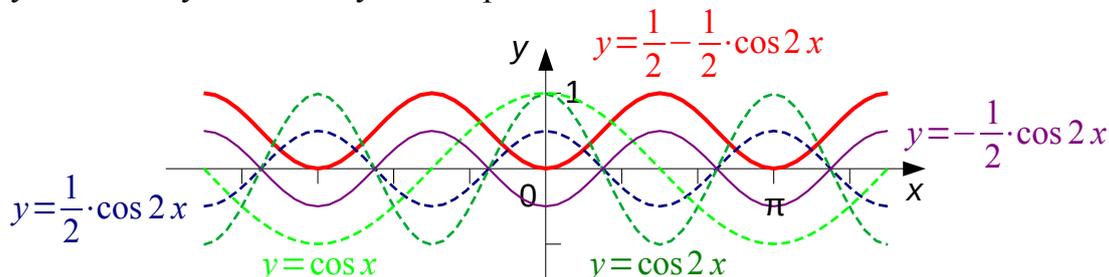
Тогда  $|y| = y$  и

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2x$$

График такой функции можно получить из графика косинусоиды  $y = \cos x$ , выполнив с ним последовательно такие действия:

- «сжать» вдвое по оси абсцисс (из-за удвоенного аргумента косинуса  $2x$ );
- «сжать» вдвое по оси ординат (из-за множителя  $\frac{1}{2}$  перед косинусом);
- перевернуть «вверх ногами» (из-за знака «минус» перед слагаемым с косинусом);
- поднять «вверх» на половину единицы (слагаемое  $\frac{1}{2}$  в выражении функции)

В результате получится следующая кривая:

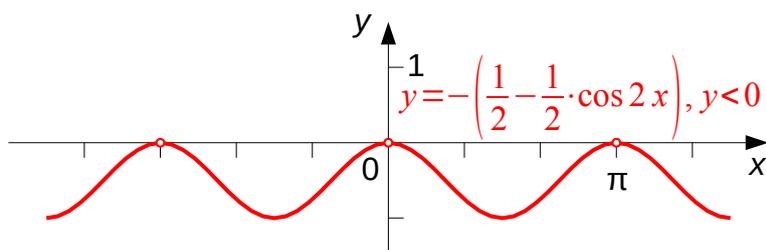


2)  $y < 0$

В этом случае  $|y| = -y$  и

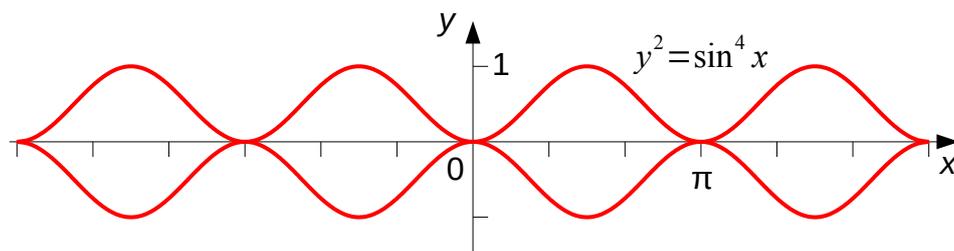
$$y = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2x\right) \quad \text{или} \quad y = \frac{1}{2} \cdot \cos 2x - \frac{1}{2}$$

График этой функции выглядит как зеркально отраженный вниз относительно оси абсцисс график для случая  $y \geq 0$  с «выколотыми» на этой оси точками (из-за того, что требование  $y < 0$  является строгим неравенством):



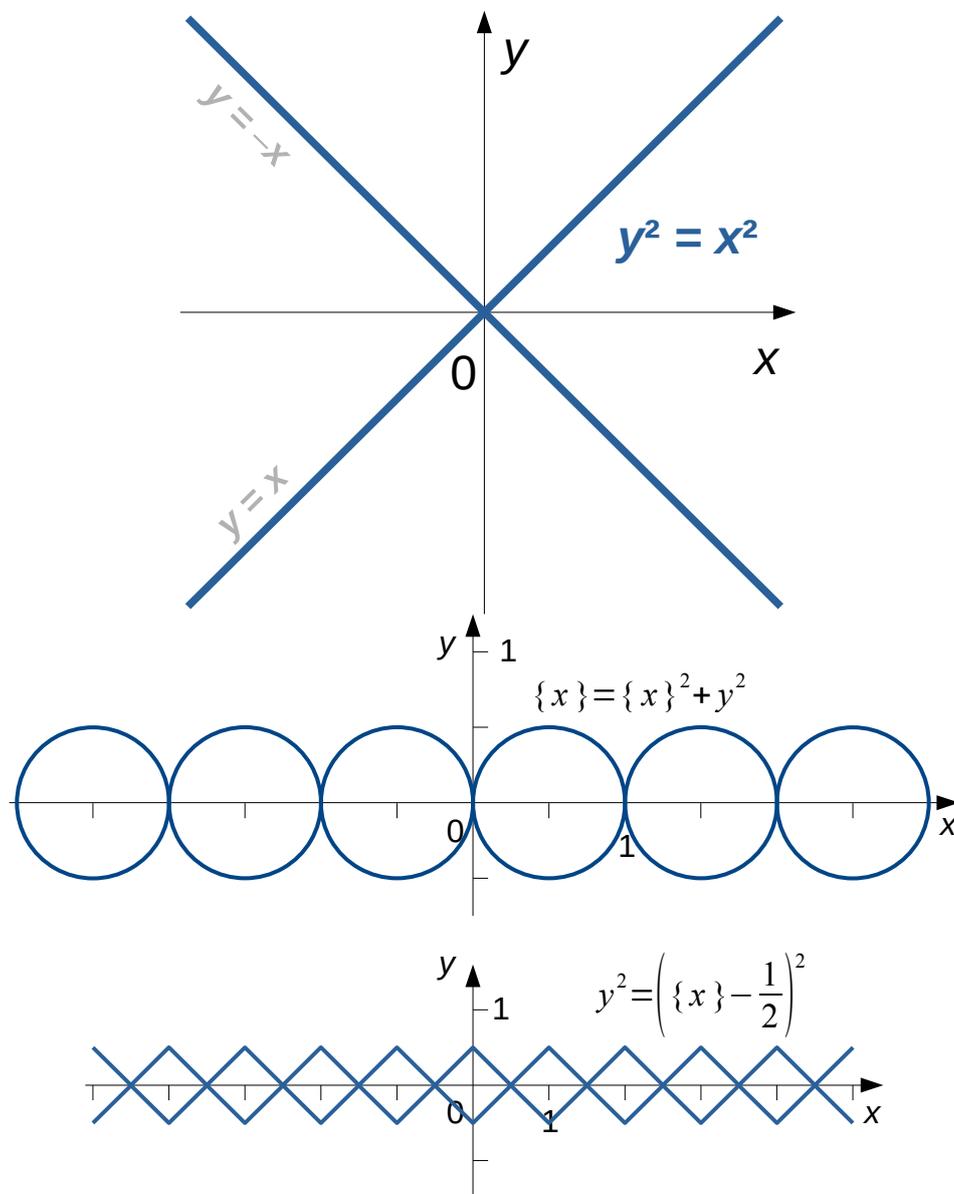
Ответом в задаче будет объединение двух изображённых кривых. Иными словами, графиком заданного в условии уравнения является фигура, состоящая из двух «идущих в противофазе» синусоид, касающихся друг друга на оси абсцисс.

О т в е т



Комментарий

Если после решения этой задачи принять во внимание ещё и ответы к упражнениям А-16, А-23 и А-24:

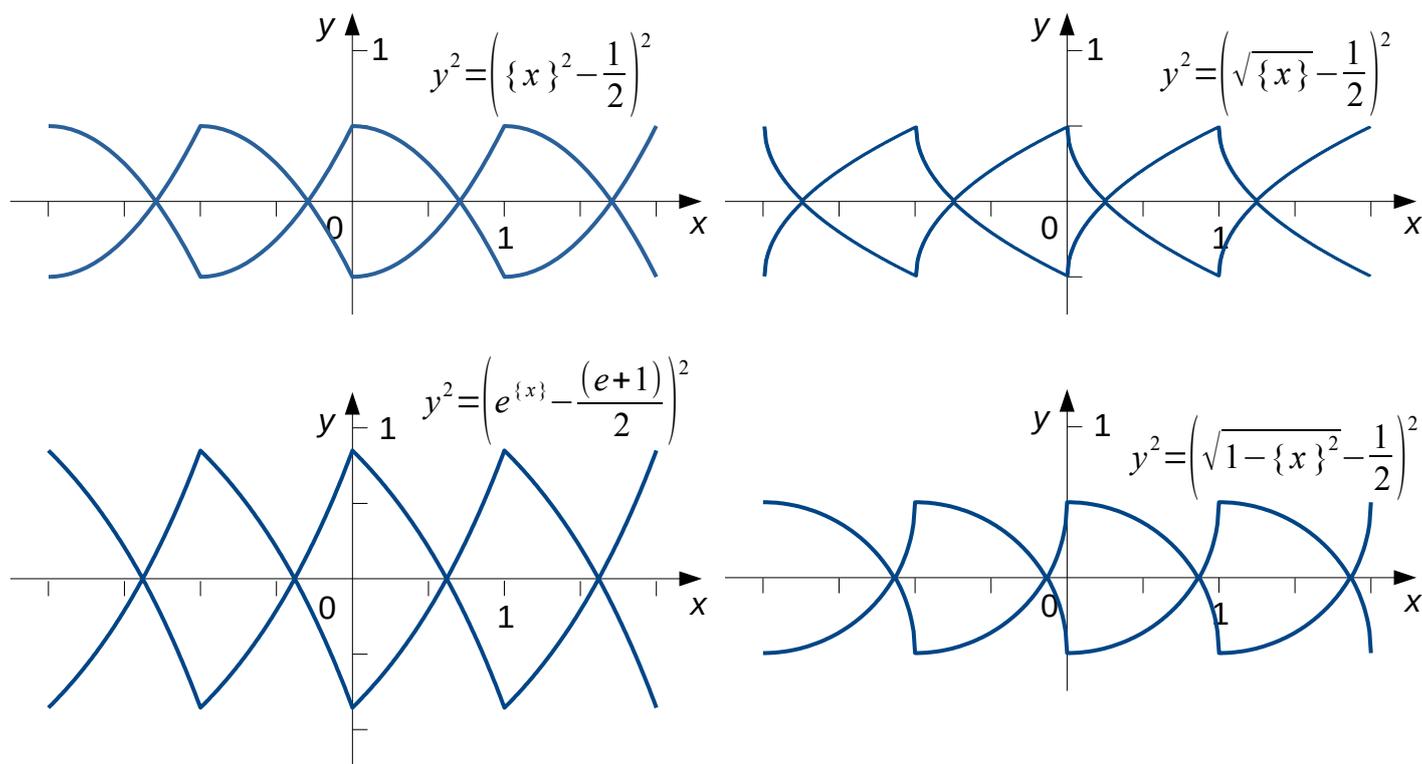


то можно сформулировать общее правило для построения графиков некоторых уравнений.

Если функция  $y = f(x)$  не принимает отрицательных значений, то график уравнения  $|y| = f(x)$  (или равносильного ему в этом случае уравнения  $y^2 = (f(x))^2$ ) можно получить из

графика  $y=f(x)$  просто добавив его изображение, зеркально отражённое относительно оси абсцисс.

Правило позволяет предложить следующие усложнённые версии задач А-18, А-19, А-20 и А-21 (решаться они будут подобно заданиям А-23 и А-24):



В случае знакопеременной  $f(x)$  построение для  $|y|=f(x)$  выполняется аналогично, с той лишь разницей, что часть графика  $y=f(x)$ , лежащая ниже оси абсцисс, предварительно «отсекается», а оставшееся – «отзеркаливается». В качестве примера здесь можно привести ответ к задаче А-11:



© Широков Александр, 06.04.2024