Школьные задачи / Алгебра / А-23

Построить график уравнения:

$$\{x\} = \{x\}^2 + y^2$$

(дробную часть числа x принято обозначать в фигурных скобках: $\{x\}$; функция $y = \{x\}$ определена на всём множестве действительных чисел, область её значений – полуинтервал $[0; 1)$, она является периодической функцией с периодом, равным 1).

Р е ш е н и е

Проведём равносильные преобразования уравнения:

$$\{x\} = \{x\}^2 + y^2 \iff y^2 = \{x\} - \{x\}^2 \iff$$
$$\iff \sqrt{y^2} = \sqrt{\{x\} - \{x\}^2} \iff |y| = \sqrt{\{x\}\cdot(1-\{x\})}$$

Важно отметить, что извлечение квадратного корня из выражения $(\{x\} - \{x\}^2)$ (или из эквивалентного ему выражения $\{x\}\cdot(1 - \{x\})$) допустимо только в случае его неотрицательности. Условие $\{x\}\cdot(1 - \{x\}) \geq 0$ выполняется при любом действительном x, что показано в решении задачи А-22.

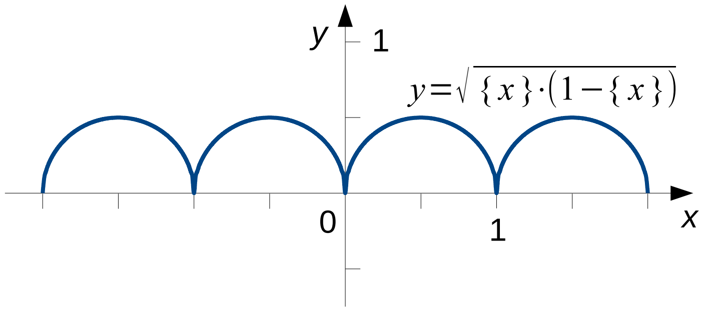
Для построения графика $|y| = \sqrt{\{x\}\cdot(1-\{x\})}$ рассмотрим два случая: когда $y \geq 0$ и когда $y < 0$.

1) $y \geq 0$

Тогда $|y| = y$ и

$$y = \sqrt{\{x\}\cdot(1-\{x\})}$$

Построение графика такой функции разобрано в решении задачи А-22:

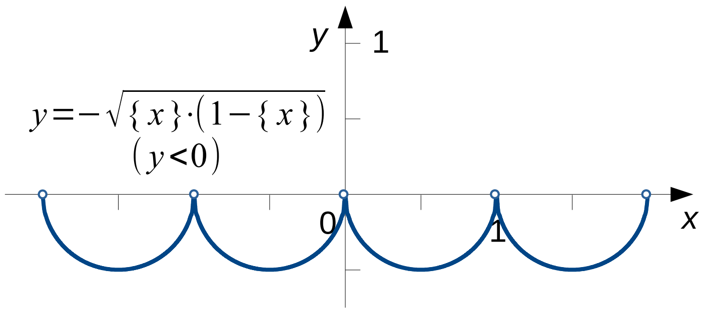


2) $y < 0$

В этом случае $|y| = - y$ и

$$y = -\sqrt{\{x\}\cdot(1-\{x\})}$$

График этой функции выглядит как зеркально отражённый вниз относительно оси абсцисс график $y=\sqrt{\{x\}\cdot(1-\{x\})}$ с «выколотыми» на этой оси точками (из-за того, что требование $y < 0$ является строгим неравенством):



Ответом в задаче будет объединение двух изображённых кривых. Иными словами, график уравнения $\{x\} = \{x\}^2 + y^2$ является бесконечной последовательностью касающихся друг друга окружностей с радиусом в половину единицы, центры у которых расположены на оси абсцисс.

О т в е т