Школьные задачи / Алгебра / А-22

Построить график функции

$$y=\sqrt{\{x\}\cdot(1-\{x\})}$$

(дробную часть числа x принято обозначать в фигурных скобках: $\{x\}$; функция $y = \{x\}$ определена на всём множестве действительных чисел, область её значений – полуинтервал [0; 1), она является периодической функцией с периодом, равным 1).

Р е ш е н и е

Поскольку $0 \le \{x\} < 1$, то из этого следует, что всегда

$$1 - \{x\} > 0,$$

а это, в свою очередь, означает, что произведение

$$\{x\}\cdot(1 - \{x\})$$

никогда не принимает отрицательных значений. Следовательно, областью определения функции

$$y(x)=\sqrt{\{x\}\cdot(1-\{x\})}$$

является всё множество действительных чисел.

Для периодической функции $f(x)$ с периодом T, выполняется следующее равенство:

$$f(x) = f(x + kT),$$

где k – целое число. В частности для функции дробной части числа ($T = 1$):

$$\{x\} = \{x + k\}$$

Из этого равенства вытекает, что

$$\sqrt{\{x\}\cdot(1-\{x\})}=\sqrt{\{x+k\}\cdot(1-\{x+k\})}\,,$$

то есть $y(x)$ также является периодической функцией с периодом $T = 1$. У целых чисел дробная часть по определению нулевая, следовательно:

$$y(0)=\sqrt{\{0\}\cdot(1-\{0\})}=\sqrt{0\cdot(1-0)}=0$$
$$y(1)=\sqrt{\{1\}\cdot(1-\{1\})}=\sqrt{0\cdot(1-0)}=0$$

Заметим, что длина отрезка на оси абсцисс между точками $x = 0$ и для $x = 1$ равна единице, а это как раз составляет период T функции $y(x)$.

В соответствии со смыслом самого понятия «дробная часть числа» на полуинтервале [0; 1) справедливо следующее равенство:

$$\{x\} = x,$$

поэтому при $0 \le x < 1$ график $y(x)$ полностью совпадает с графиком функции

$$y_1=\sqrt{x\cdot(1-x)}$$

Чтобы понять, как именно выглядит её график, проведём равносильные преобразования $y_1(x)$, помня, что значение квадратного корня неотрицательно (то есть $y \ge 0$), как и подкоренное выражение ($x\cdot(1 - x) \ge 0$; при решении этого неравенства получается, что областью определения функции $y_1(x)$ является отрезок [0; 1]):

$$y=\sqrt{x\cdot(1-x)} \quad \Leftrightarrow$$
$$y=\sqrt{x-x^2} \quad \Leftrightarrow$$
$$y^2=x-x^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$x^2-x+y^2=0 \quad \Leftrightarrow$$
$$x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+y^2=0 \quad \Leftrightarrow$$
$$x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Полученное выражение есть уравнение окружности с радиусом $\frac{1}{2}$ и центром в точке $\left(\frac{1}{2};\, 0\right)$. В соответствии с требованием $y \geq 0$ получается, что график $y_1(x)$ в области её определения $(0 \leq x \leq 1)$ представляет собой верхнюю половину упомянутой окружности (рис. 1).

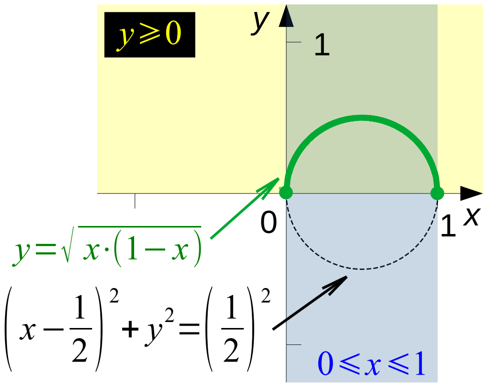


Рис. 1.

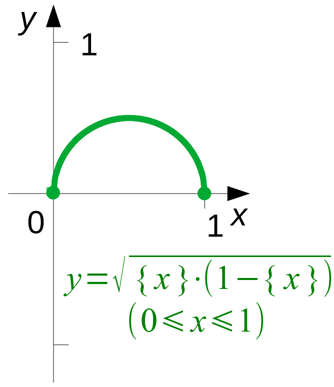


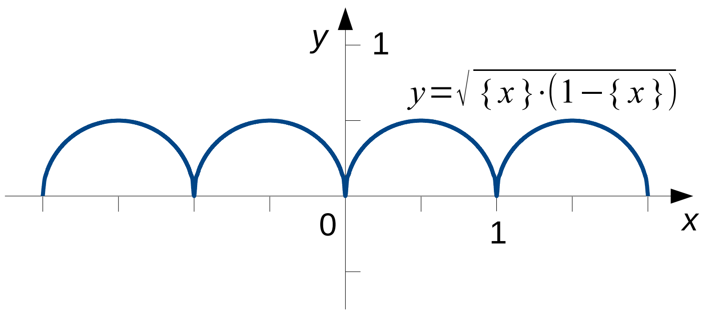
Рис. 2.

С учётом того, что

$$y(0) = y_1(0) = 0$$
$$y(1) = y_1(1) = 0$$

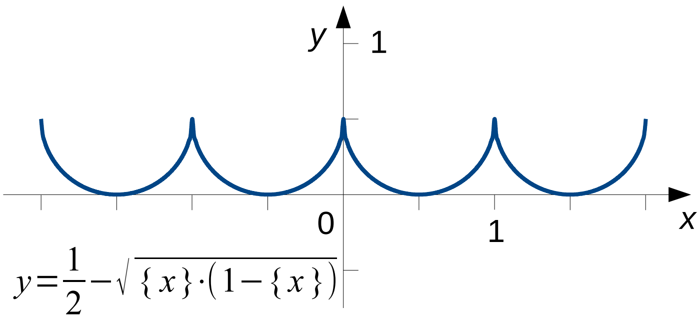
получается, что график $y(x)$ на отрезке [0; 1] выглядит так же (рис. 2). Если теперь принять во внимание периодичность $y(x)$ и величину периода ($T = 1$), то становится ясно, что её график на всей области определения представляет собой непрерывную линию в виде бесконечной череды примыкающих друг к другу полуокружностей.

О т в е т



К о м м е н т а р и й

Отталкиваясь от полученного результата не представляет большого труда подобрать функцию, с аналогичным по виду графиком, но чтобы полуокружности были вывернуты «вверх». Для этого график $y=\sqrt{\{x\}\cdot(1-\{x\})}$ нужно «перевернуть», умножив на –1, а затем «поднять», прибавив половину единицы:



Построение графика такой функции может быть предложено в качестве усложнённого варианта разобранной выше задачи.