Построить график функции

$$y=\left|\sqrt{1-\{x\}^2}-\frac{1}{2}\right|$$

(дробную часть числа x принято обозначать в фигурных скобках: $\{x\}$; функция $y = \{x\}$ определена на всём множестве действительных чисел, область её значений – полуинтервал [0; 1), она является периодической функцией с периодом, равным 1).

Р е ш е н и е

Поскольку $0 \le \{x\} < 1$, то из этого следует, что

$$0 \le \{x\}^2 < 1,$$

а значит $(1 - \{x\}^2) > 0$ при любом действительном x. Отсюда следует, что функция

$$y_1=\sqrt{1-\{x\}^2}$$

также определена на всём множестве действительных чисел.

Для периодической функции $f(x)$ с периодом T, выполняется следующее равенство:

$$f(x) = f(x + kT),$$

где k – целое число. В частности для функции дробной части числа ($T = 1$):

$$\{x\} = \{x + k\}$$

Из этого равенства вытекает, что

$$\sqrt{1-\{x\}^2}=\sqrt{1-\{x+k\}^2},$$

то есть $y_1=\sqrt{1-\{x\}^2}$ также является периодической функцией с периодом $T = 1$. Построим её график. У целых чисел дробная часть по определению нулевая, следовательно:

$$y_1(0)=\sqrt{1-\{0\}^2}=\sqrt{1-0^2}=1$$

$$y_1(1)=\sqrt{1-\{1\}^2}=\sqrt{1-0^2}=1$$

Примечательно, что длина отрезка на оси абсцисс между точками $x = 0$ и для $x = 1$ равна единице, и это как раз составляет период T функции $y_1(x)$.

В соответствии со смыслом самого понятия «дробная часть числа» на интервале (0; 1) справедливо следующее равенство:

$$\{x\} = x,$$

поэтому при $0 < x < 1$ график $y_1(x)$ полностью совпадает с графиком функции

$$y_2=\sqrt{1-x^2}$$

Чтобы понять, как именно выглядит график $y_2(x)$, проведём равносильные преобразования выражения функции, помня, что значение квадратного корня неотрицательно, как и подкоренное выражение:

$$y=\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 0\\ 1-x^2\ge 0\\ y=\sqrt{1-x^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 0\\ x^2\le 1\\ y^2=1-x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 0\\ -1\le x\le 1\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

Выражение $x^2 + y^2 = 1$ есть уравнение окружности единичного радиуса с центром в начале координат. С учётом требования $y \ge 0$ получается, что график функции $y_2=\sqrt{1-x^2}$ в области её определения ($-1 \le x \le 1$) представляет собой верхнюю половину упомянутой окружности, а на интервале $0 < x < 1$ это будет дуга в четверть окружности с «выколотыми» точками на её концах (рис. 1).

Отметим на графике ещё две точки, соответствующие значениям $y_1(0)$ и $y_1(1)$ (рис. 2). Если теперь учесть периодичность $y_1=\sqrt{1-\{x\}^2}$ и величину периода ($T = 1$), то становится ясно, что её график на всей области определения представляет собой бесконечную череду повторяющихся дуг окружности с бесконечным числом точек разрыва в местах, соответствующих целым значениям аргумента (рис. 3).

Далее построим график функции

$$y_3=\sqrt{1-\{x\}^2}-\frac{1}{2}$$

Он получается из графика $y_1(x)$ смещением последнего вдоль оси ординат на половину единицы (т. е. в сторону отрицательных значений ординаты) (рис. 4).

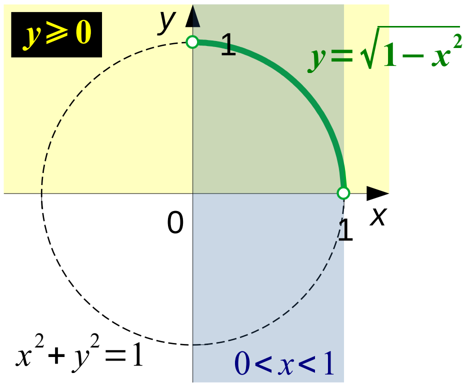


Рис. 1.

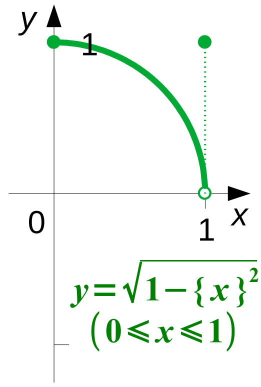


Рис. 2.

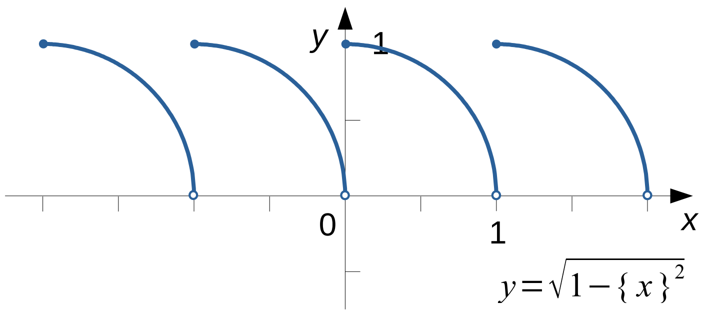


Рис. 3.

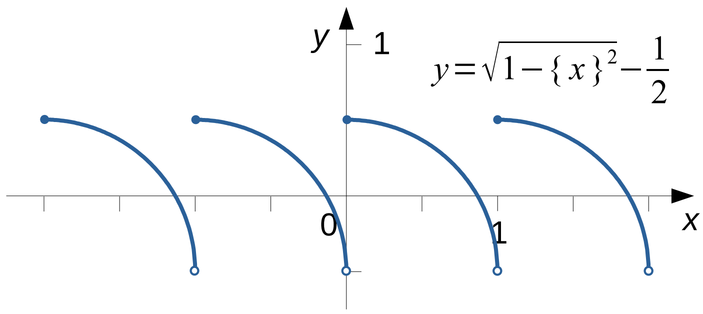


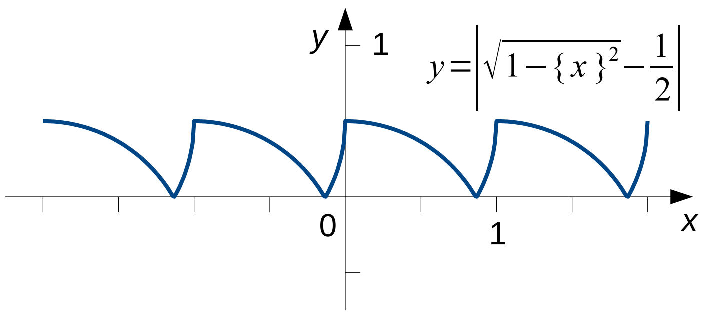
Рис. 4.

Для построения графика функции

$$y=\left|\sqrt{1-\{x\}^2}-\frac{1}{2}\right|$$

достаточно все точки графика $y_3=\sqrt{1-\{x\}^2}-\frac{1}{2}$, лежащие в третьем и четвёртом квадрантах (т. е. имеющие отрицательные значения ординаты), зеркально отразить относительно оси абсцисс в полуплоскость положительных значений ординат. Получившийся результат представляет собой непрерывную (без точек разрыва) «зубчатую» линию. Из графика также видно, что функция $y(x)$ обладает периодичностью ($T = 1$).

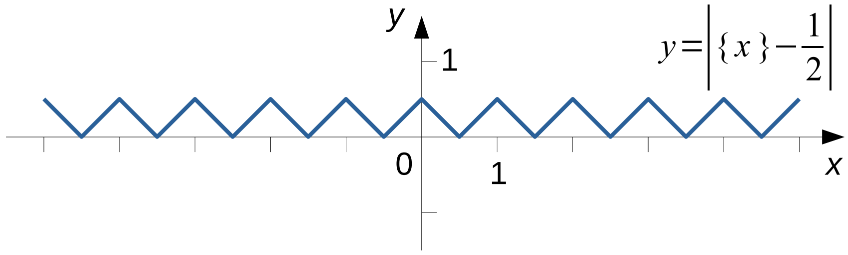
Ответ

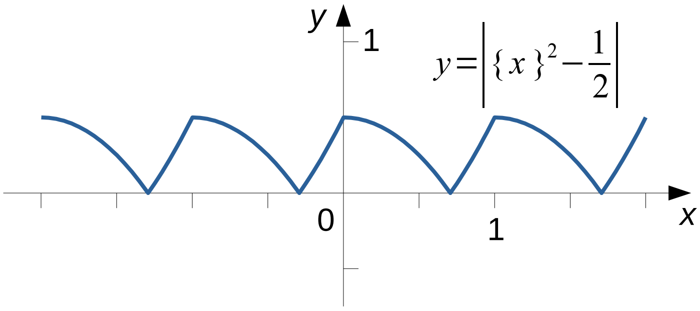


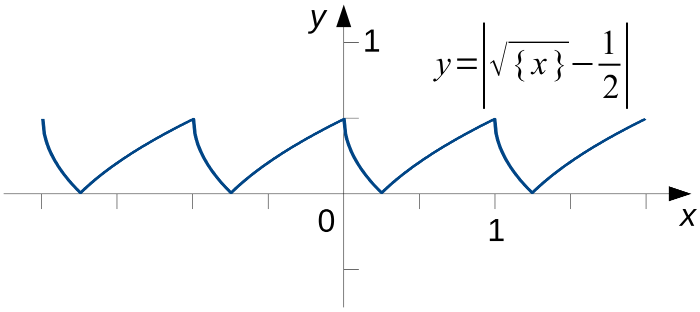
Комментарий

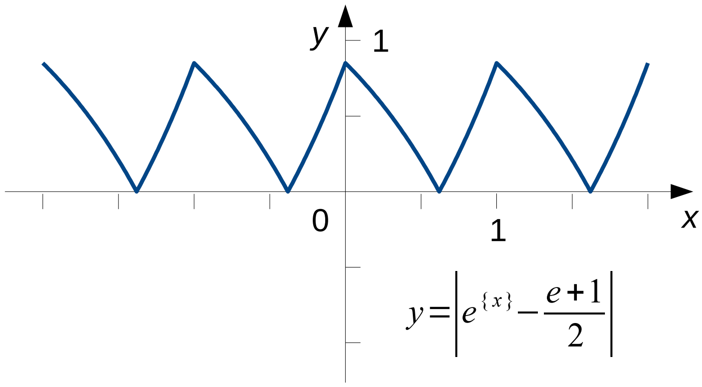
Раздел сайта «Школьные задачи» берёт своё начало из моей личной симпатии к построению графиков функций. Как уже отмечалось в комментарии к задаче А-17, тема функции дробной части числа $y = \{x\}$ не коснулась меня в школьные годы, хотя это просто кладезь для создания весьма интересных упражнений, результатом которых является изображение сложных кривых, заданных относительно простыми математическими выражениями.

О вкусах, конечно, не спорят, но я нахожу особую красоту как в графике, построенном в разобранной выше задаче, так и в графиках из заданий А-17, А-18, А-19 и А-20:









Справедливости ради стоит отметить, что решаются указанные задачи довольно однотипно, да и форма получившихся кривых тоже вполне однообразная – «зубчатая». Любопытно, что в одном учебнике* при объяснении подхода к построению графиков периодических функций мне попалась вот такая картинка:

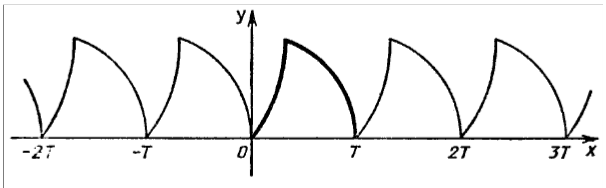


Рис. 34

В тексте книги нет информации, график какой именно функции изображён на иллюстрации и скорее всего он имеет чисто схематический характер, тем не менее сложно не обратить внимание на некоторое визуальное сходство его с ответом к разобранной здесь задаче.

© Широков Александр, 06.04.2024

* См. стр. 33 издания: Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. сред. шк. / Под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 1990. – 320 с.