Школьные задачи / Алгебра / А-20

Построить график функции

$$y = \left| e^{\{x\}} - \frac{(e+1)}{2} \right|$$

(дробную часть числа x принято обозначать в фигурных скобках: $\{x\}$; функция $y = \{x\}$ определена на всём множестве действительных чисел, область её значений – полуинтервал [0; 1), она является периодической функцией с периодом, равным 1).

Решение

Поскольку $0 \le \{x\} < 1$, то из этого следует, что областью определения функции

$$y_1 = e^{\{x\}}$$

является всё множество действительных чисел, а значит и указанная в условии задачи функция также определена при любом действительном x.

Для периодической функции $f(x)$ с периодом T, выполняется следующее равенство:

$$f(x) = f(x + kT),$$

где k – целое число. Для функции дробной части числа ($T = 1$):

$$\{x\} = \{x + k\}$$

Отсюда вытекает, что

$$e^{\{x\}} = e^{\{x+k\}},$$

то есть $y_1 = e^{\{x\}}$ также является периодической функцией с периодом $T = 1$. Построим её график. У целых чисел дробная часть по определению нулевая, значит:

$$y_1(0) = e^{\{0\}} = e^0 = 1$$

$$y_1(1) = e^{\{1\}} = e^0 = 1$$

Следует заметить, что длина отрезка на оси абсцисс между точками $x = 0$ и для $x = 1$ равна единице, что как раз составляет период T функции $y_1(x)$.

В соответствии со смыслом самого понятия «дробная часть числа» на интервале (0; 1) справедливо следующее равенство:

$$\{x\} = x,$$

поэтому при $0 < x < 1$ график $y_1(x)$ полностью совпадает с графиком экспоненциальной функции $y_2 = e^x$ (рис. 1).

Отметим на графике ещё две точки, соответствующие значениям $y_1(0)$ и $y_1(1)$ (рис. 2). С учётом периодичности $y_1 = e^{\{x\}}$ и величины периода ($T = 1$) становится ясно, что её график на всей области определения представляет собой бесконечную череду повторяющихся фрагментов экспоненты с бесконечным числом точек разрыва в местах, соответствующих целым значениям аргумента (рис. 3).

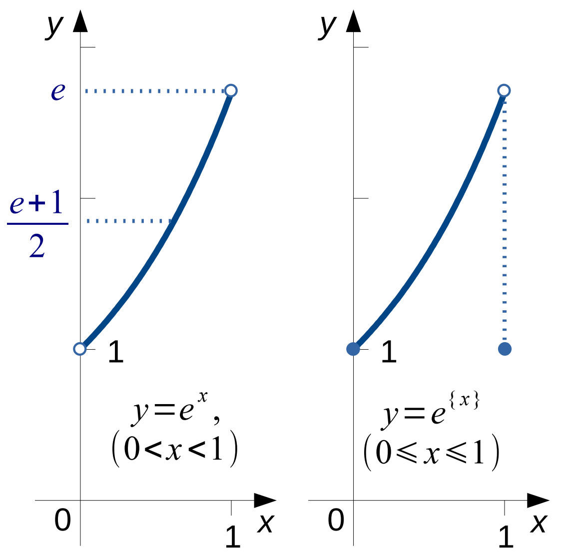

Рис. 1. Рис. 2.

Далее построим график функции

$$y_3 = e^{\{x\}} - \frac{e+1}{2}$$

Его можно получить из графика $y_1 = e^{\{x\}}$ смещением последнего вдоль оси ординат на величину $\frac{e+1}{2}$ вниз (т. е. в сторону отрицательных значений ординаты) (рис. 4). Легко заметить, что число $\frac{e+1}{2}$ – среднее арифметическое между e и 1, то есть данная величина располагается ровно посередине полуинтервала [1; e), являющегося множеством значений функции $y_1 = e^{\{x\}}$.

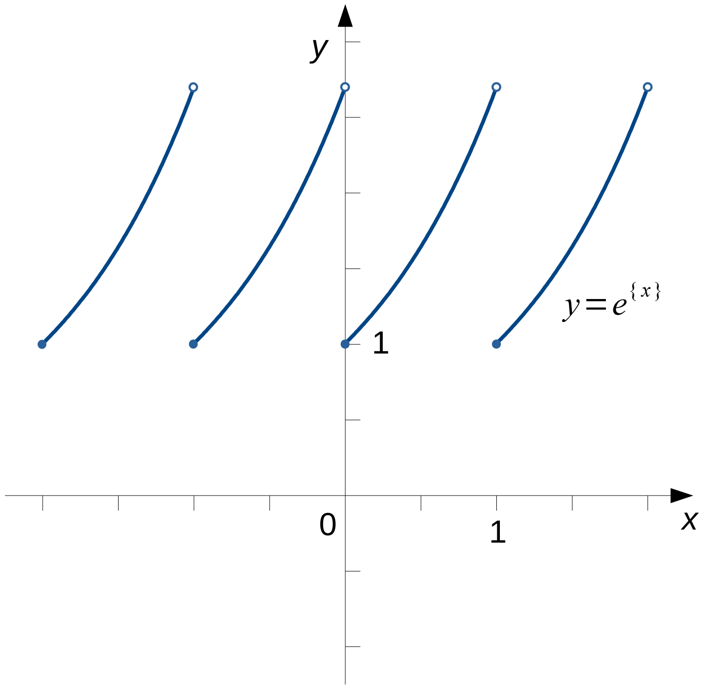

Рис. 3.

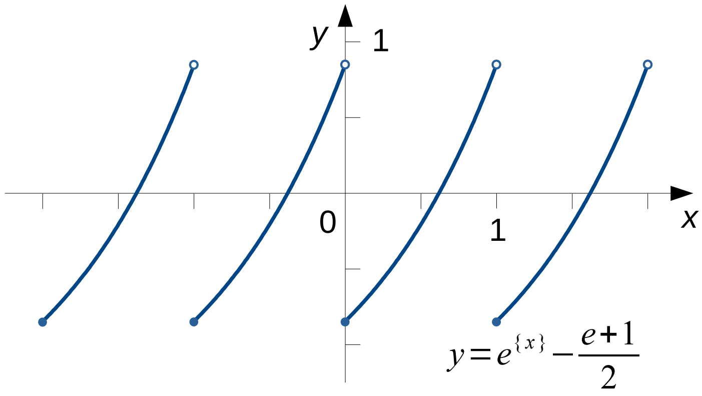

Рис. 4.

Для построения графика функции

$$y = \left| e^{\{x\}} - \frac{(e+1)}{2} \right|$$

достаточно все точки графика $y_3 = e^{\{x\}} - \frac{e+1}{2}$, лежащие в третьем и четвёртом квадрантах (т. е. имеющие отрицательные значения ординаты), зеркально отразить относительно оси абсцисс в полуплоскость положительных значений ординат. Получившийся результат представляет собой непрерывную (без точек разрыва) «зубчатую» линию. Из графика также видно, что функция $y(x)$ обладает периодичностью ($T = 1$).

О т в е т