Построить график функции

$$y=\left|\sqrt{\{x\}}-\frac{1}{2}\right|$$

(дробную часть числа x принято обозначать в фигурных скобках: $\{x\}$; функция $y = \{x\}$ определена на всём множестве действительных чисел, область её значений – полуинтервал $[0;\ 1)$, она является периодической функцией с периодом, равным 1).

Решение

Поскольку $0 \le \{x\} < 1$, то из этого следует, что областью определения функции

$$y_1=\sqrt{\{x\}}$$

является всё множество действительных чисел, а значит и указанная в условии задачи функция также определена при любом действительном x.

Для периодической функции $f(x)$ с периодом T, выполняется следующее равенство:

$$f(x) = f(x + kT),$$

где k – целое число. Для функции дробной части числа ($T = 1$):

$$\{x\} = \{x + k\}$$

С учётом того, что дробная часть числа принимает только неотрицательные значения, при извлечении квадратного корня из обеих частей последнего выражения также получится верное равенство:

$$\sqrt{\{x\}}=\sqrt{\{x+k\}}$$

Отсюда следует, что

$$y_1=\sqrt{\{x\}}$$

тоже является периодической функцией с периодом $T = 1$. Построим её график. У целых чисел дробная часть по определению нулевая, следовательно:

$$y_1(0)=\sqrt{\{0\}}=\sqrt{0}=0$$

$$y_1(1)=\sqrt{\{1\}}=\sqrt{0}=0$$

Заметим, что длина отрезка на оси абсцисс между точками $x = 0$ и для $x = 1$ равна единице, что как раз составляет период T функции $y_1(x)$.

В соответствии со смыслом самого понятия «дробная часть числа» на интервале $(0;\ 1)$ справедливо следующее равенство:

$$\{x\} = x,$$

поэтому при $0 < x < 1$ график $y_1(x)$ полностью совпадает с графиком функции

$$y_2=\sqrt{x},$$

то есть представляет собой ветвь квадратичной параболы (рис. 1).

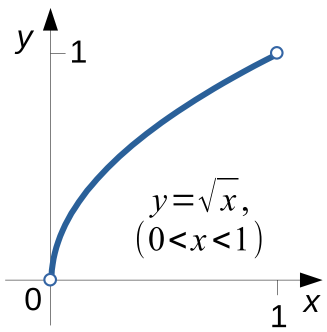


Рис. 1.

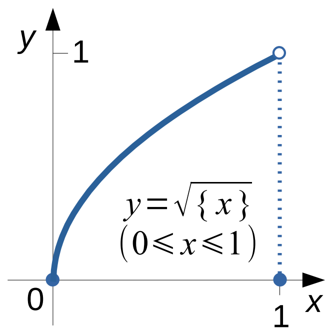


Рис. 2.

Отметим на графике ещё две точки, соответствующие значениям $y_1(0)$ и $y_1(1)$ (рис. 2). С учётом периодичности $y_1=\sqrt{\{x\}}$ становится ясно, что её график на всей области определения представляет собой бесконечную череду повторяющихся параболических фрагментов и имеет бесконечное число точек разрыва в местах, соответствующих целым значениям аргумента (рис. 3).

Материал сайта shurichimik.narod.ru

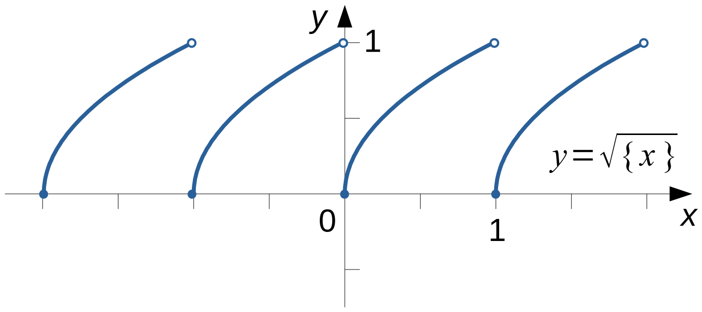


Рис. 3.

Теперь построим график функции

$$y_3=\sqrt{\{x\}}-\frac{1}{2}$$

Его можно получить из графика $y_1=\sqrt{\{x\}}$ смещением последнего вдоль оси ординат на половину единицы вниз (т. е. в сторону отрицательных значений ординаты) (рис. 4).

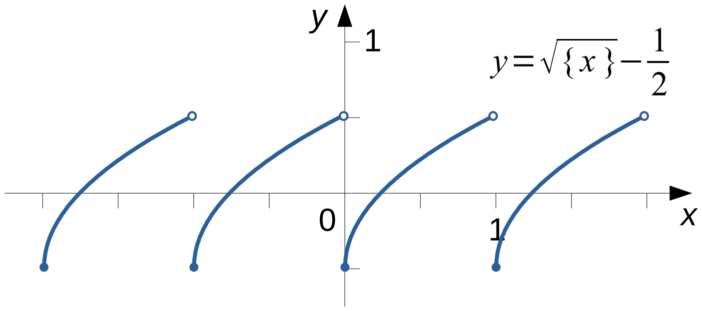


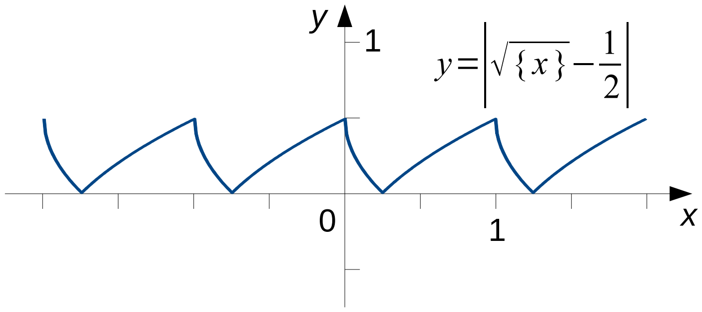
Рис. 4.

Для построения графика функции

$$y=\left|\sqrt{\{x\}}-\frac{1}{2}\right|$$

достаточно все точки графика $y_3=\sqrt{\{x\}}-\frac{1}{2}$, лежащие в третьем и четвёртом квадрантах (т. е. имеющие отрицательные значения ординаты), зеркально отразить относительно оси абсцисс в полуплоскость положительных значений ординат. Получившийся результат представляет собой непрерывную (без точек разрыва) «зубчатую» линию. Из графика также видно, что функция $y(x)$ обладает периодичностью ($T = 1$).

О т в е т



© Широков Александр, 29.03.2024

Материал сайта shurichimik.narod.ru