

Построить график функции

$$y = \left| \{x\}^2 - \frac{1}{2} \right|$$

(дробную часть числа  $x$  принято обозначать в фигурных скобках:  $\{x\}$ ; функция  $y = \{x\}$  определена на всём множестве действительных чисел, область её значений – полуинтервал  $[0; 1)$ , она является периодической функцией с периодом, равным 1).

**Решение**

Для периодической функции  $f(x)$  с периодом  $T$ , выполняется следующее равенство:

$$f(x) = f(x + kT),$$

где  $k$  – целое число. Для функции дробной части числа это запишется так ( $T = 1$ ):

$$\{x\} = \{x + k\}$$

С учётом того, что дробная часть числа принимает только неотрицательные значения, при возведении обеих частей последнего выражения в квадрат также получится верное равенство:

$$\{x\}^2 = \{x + k\}^2$$

Отсюда следует, что функция

$$y_1 = \{x\}^2$$

тоже является периодической с периодом  $T = 1$ . Построим её график. У целых чисел дробная часть по определению нулевая, следовательно:

$$y_1(0) = \{0\}^2 = 0^2 = 0$$

$$y_1(1) = \{1\}^2 = 0^2 = 0$$

Заметим, что длина отрезка на оси абсцисс между точками  $x = 0$  и для  $x = 1$  равна единице, что как раз составляет период  $T$  функции  $y_1 = \{x\}^2$ .

Из смысла самого понятия «дробная часть числа» вытекает, что на интервале  $(0; 1)$  выполняется следующее равенство:

$$\{x\} = x,$$

поэтому при  $0 < x < 1$  график  $y_1 = \{x\}^2$  полностью совпадает с графиком функции  $y_2 = x^2$ , то есть представляет собой ветвь квадратичной параболы (рис. 1).

Отметим на графике ещё две точки, соответствующие значениям  $y_1(0)$  и  $y_1(1)$  (рис. 2). С учётом периодичности  $y_1 = \{x\}^2$  становится ясно, что её график на всей области определения представляет собой бесконечную череду повторяющихся параболических фрагментов и имеет бесконечное число точек разрыва в местах, соответствующих целым значениям аргумента (рис. 3).

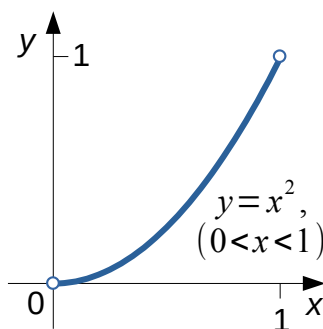


Рис. 1.

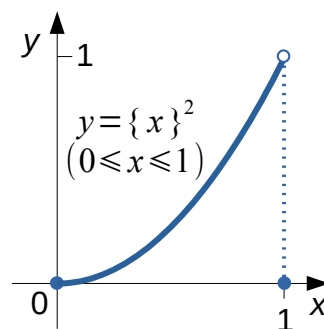


Рис. 2.

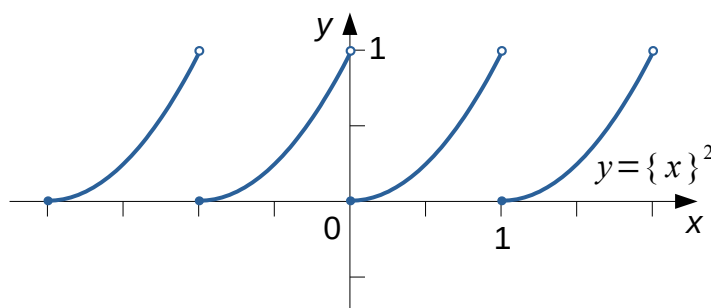


Рис. 3.

Теперь построим график функции

$$y_3 = \{x\}^2 - \frac{1}{2}$$

Его можно получить из графика  $y_1 = \{x\}^2$  смещением последнего вдоль оси ординат на половину единицы вниз (т. е. в сторону отрицательных значений ординаты) (рис. 4).

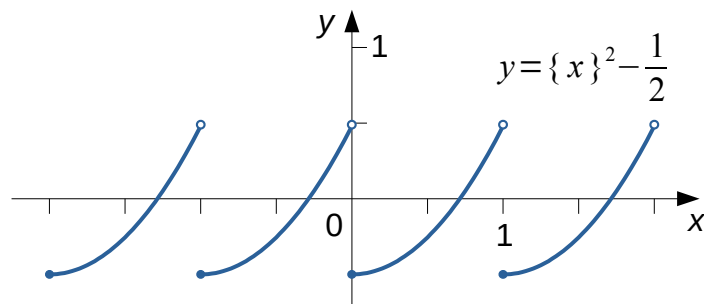


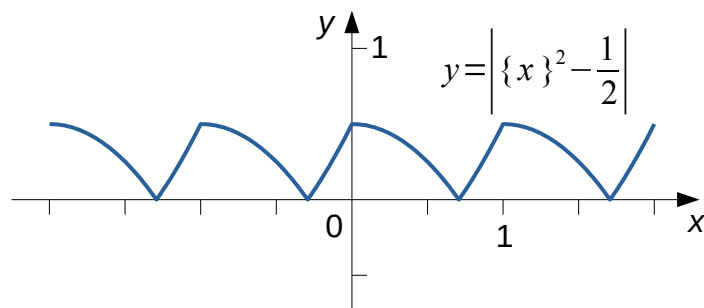
Рис. 4.

Для построения графика функции

$$y = \left| \{x\}^2 - \frac{1}{2} \right|$$

достаточно все точки графика  $y_3 = \{x\}^2 - \frac{1}{2}$ , лежащие в третьем и четвёртом квадрантах (т. е. имеющие отрицательные значения ординаты), зеркально отразить относительно оси абсцисс в полуплоскость положительных значений ординат. Получившийся результат представляет собой непрерывную (без точек разрыва) «зубчатую» линию, где каждый из «зубьев» по форме напоминает профиль акульевого плавника. Из графика также видно, что функция  $y(x)$  обладает периодичностью ( $T = 1$ ).

О т в е т



© Широков Александр, 18.02.2024