

Школьные задачи / Алгебра / А-17

Дробная часть числа x обозначается как $\{x\}$. Данная функция определена на всём множестве действительных чисел, область её значений – полуинтервал $[0; 1)$, кроме того, она является периодической функцией с периодом, равным 1. С учётом этих данных построить график функции

$$y = \left| \{x\} - \frac{1}{2} \right|$$

Решение

Построим сначала график функции

$$y_1 = \{x\}$$

У целых чисел дробная часть по определению нулевая, следовательно:

$$y_1(0) = \{0\} = 0$$

$$y_1(1) = \{1\} = 0$$

Заметим, что длина отрезка на оси абсцисс между точками $x = 0$ и для $x = 1$ равна единице, что как раз составляет период функции $y_1 = \{x\}$.

Из смысла самого понятия «дробная часть числа» вытекает, что на интервале $(0; 1)$ выполняется следующее равенство:

$$\{x\} = x,$$

поэтому при $0 < x < 1$ график $y_1 = \{x\}$ полностью совпадает с графиком функции $y_2 = x$, то есть представляет собой прямую линию, образующую с положительным направлением оси абсцисс угол 45° (рис. 1).

Отметим на графике ещё две точки, соответствующие значениям $y_1(0)$ и $y_1(1)$ (рис. 2). С учётом периодичности $y_1 = \{x\}$ становится ясно, что её график на всей области определения представляет собой бесконечную череду повторяющихся отрезков и имеет бесконечное число точек разрыва в местах, соответствующих целым значениям аргумента (рис. 3).

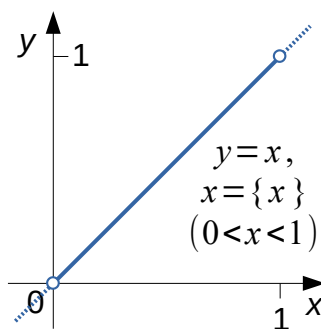


Рис. 1.

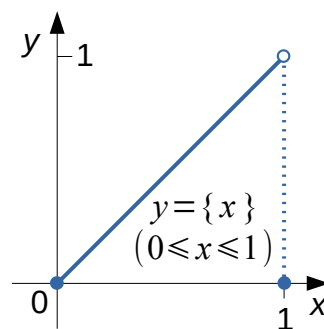


Рис. 2.

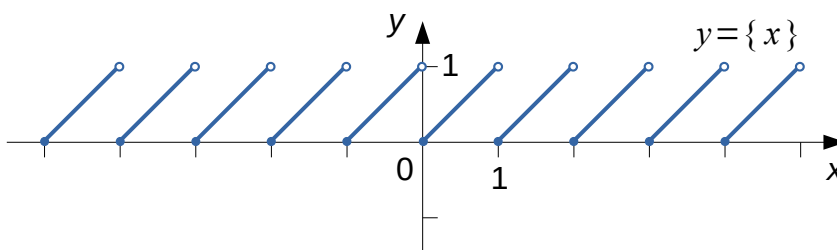


Рис. 3.

Теперь построим график функции

$$y_3 = \{x\} - \frac{1}{2}$$

Его можно получить из графика $y_1 = \{x\}$ смещением последнего вдоль оси ординат на половину единицы вниз (т. е. в сторону отрицательных значений ординаты) (рис. 4).

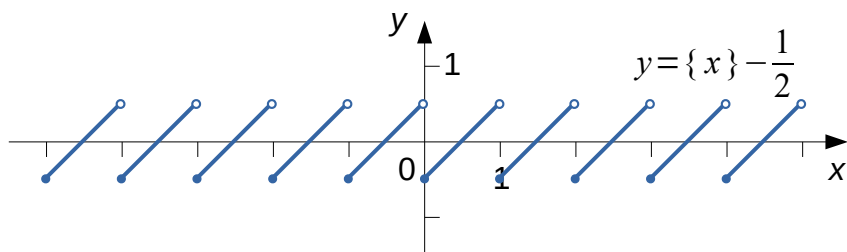


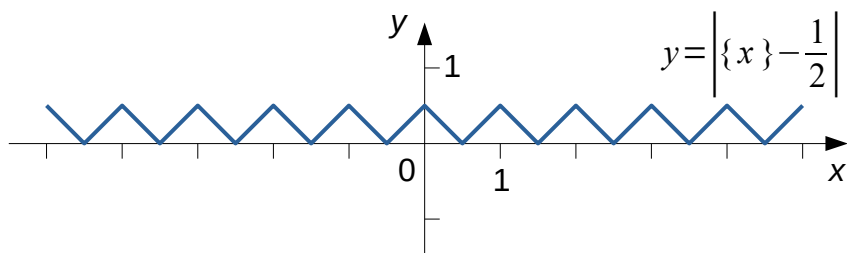
Рис. 4.

Для построения графика функции

$$y = \left| \{x\} - \frac{1}{2} \right|$$

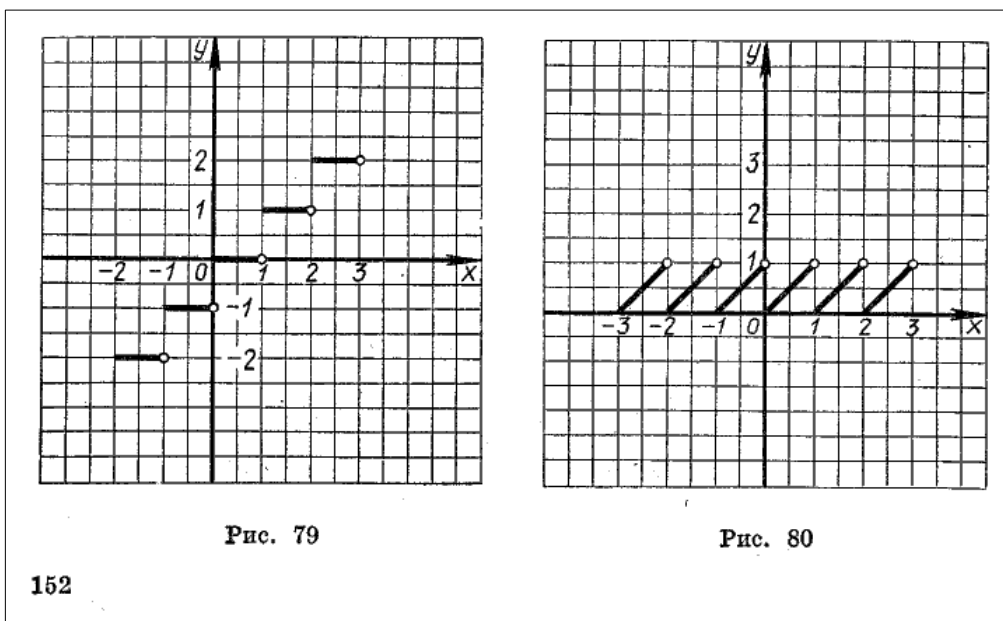
достаточно все точки графика $y_3 = \{x\} - \frac{1}{2}$, лежащие в третьем и четвёртом квадрантах (т. е. имеющие отрицательные значения ординаты), зеркально отразить относительно оси абсцисс в полуплоскость положительных значений ординат. Легко заметить, что получившийся результат представляет собой непрерывную (без точек разрыва) ломаную линию, при этом сам график имеет вид, характерный для чётных функций – симметричен относительно оси ординат, а ещё, как и $y_1 = \{x\}$, обладает свойством периодичности (период равен 1).

О т в е т



Комментарий

В школьных учебниках, выпущенных в советские годы, рассматриваются понятия целой $[x]$ и дробной $\{x\}$ частей числа, в том числе там* показаны и графики этих функций:



152

* Приведено изображение фрагмента стр. 152 издания: Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Монахов В.М., Муравин К.С., Суворова С.Б. Алгебра. Учебное пособие для 8 класса средней школы. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 1981. – 256 с.

В учебниках, которые были у меня в школьную пору, этот материал отсутствовал (ну что ж – не впервой уже сталкиваться с подобным^{*}), хотя в специализированных изданиях тех же лет обсуждаемые здесь сведения всё-таки имеются^{**}.

На интернет-просторах встречаются разборы решений школьных олимпиадных задач, в которых $[x]$ и $\{x\}$ задействованы непосредственно. Поэтому с учётом сказанного выше, формулировка предлагаемой здесь задачи такова, чтобы ученикам, не знакомым с функцией $y = \{x\}$, было вполне по силам справиться с заданием.

© Широков Александр, 18.02.2024

* См. заметку «Листая старые советские школьные учебники...» в разделе сайта «Соображалки» (URL: <http://shurichimik.narod.ru/consideration/onepage/46-school-textbook.htm>).

** См. стр. 50 в пособии: Виленкин Н.Я., Сурвилло Г.С., Симонов А.С., Кудрявцев А.И. Алгебра для 9 класса: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики. – М.: Просвещение, 1996. – 384 с.