Школьные задачи / Алгебра / А-15

Найти все корни уравнения: $z^5 + 2z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 16z + 32 = 0$

Р е ш е н и е

В многочлене в правой части уравнения каждое последующее слагаемое можно получить из предыдущего умножением на $\frac{2}{z}$. Это позволяет рассмотреть правую часть как сумму первых шести членов геометрической прогрессии, первый член которой равен $b_1 = z^5$, а знаменатель $q = \frac{2}{z}$. Ранее было продемонстрировано*, как благодаря такому подходу многочлен раскладывается на множители. Поскольку в нашем случае z – неизвестная величина, то стоит специально оговорить, что необходимые преобразования при разложении будут справедливы при $z \neq 0$ и $z - 2 \neq 0$ (то есть $z \neq 2$). Такие условия выполняются – подстановка 0 и 2 в исходное уравнение показывает, что эти числа его корнями не являются.

Всё сказанное применительно к данной задаче означает, что исходное уравнение равносильно другому:

$$z^5 + 2z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 16z + 32 = 0 \Leftrightarrow (z + 2)\cdot(z^2 + 2z + 4)\cdot(z^2 - 2z + 4) = 0$$

Для его решения остаётся выяснить, при каких значениях z каждый из трёх сомножителей обращается в ноль, иными словами уравнение разбивается на совокупность трёх следующих:

$$\left[\begin{array}{l} z + 2 = 0 \\ z^2 + 2z + 4 = 0 \\ z^2 - 2z + 4 = 0 \end{array}\right.$$

Решим каждое из них по отдельности:

1) $z + 2 = 0$

Отсюда $z_1 = -2$.

2) $z^2 + 2z + 4 = 0$

Дискриминант такого квадратного уравнения $D = 2^2 - 4\cdot1\cdot4 = 4 - 16 = -12 < 0$, следовательно, оно имеет комплексные корни:

$$z_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{D}}{2\cdot1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4\cdot3\cdot(-1)}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}\cdot i}{2} = -1 \pm i\cdot\sqrt{3}$$

3) $z^2 - 2z + 4 = 0$

У этого квадратного уравнения дискриминант $D = (-2)^2 - 4\cdot1\cdot4 = 4 - 16 = -12$ тоже отрицателен, значит:

$$z_{4,5} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{D}}{2\cdot1} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}\cdot i}{2} = 1 \pm i\cdot\sqrt{3}$$

В итоге получается, что исходное уравнение имеет один действительный корень и четыре комплексных.

О т в е т

$z_1 = -2$, $z_{2,3,4,5} = \pm1 \pm i\cdot\sqrt{3}$

* См. задание А-14.