Школьные задачи / Алгебра / А-14

Разложить на множители: $m^5 + m^4n + m^3n^2 + m^2n^3 + mn^4 + n^5$

Решение

В предложенном многочлене нетрудно заметить, что каждое последующее слагаемое можно получить из предыдущего умножением на $\frac{n}{m}$. Иными словами исходное выражение удобно рассматривать как сумму первых шести членов геометрической прогрессии, первый член которой равен $a_1 = m^5$, а знаменатель $q = \frac{n}{m}$. На основании этого выражение можно преобразовать, воспользовавшись формулой суммы первых k членов такой прогрессии:

$$m^5+m^4n+m^3n^2+m^2n^3+mn^4+n^5=\frac{a_1\cdot(1-q^k)}{1-q}=\frac{m^5\cdot\left(1-\left(\frac{n}{m}\right)^6\right)}{1-\frac{n}{m}}=$$

$$=\frac{m^5\cdot\left(1-\frac{n^6}{m^6}\right)}{\frac{m-n}{m}}=m\cdot\frac{m^5\cdot\left(1-\frac{n^6}{m^6}\right)}{m-n}=\frac{m^6\cdot\left(1-\frac{n^6}{m^6}\right)}{m-n}=\frac{m^6-n^6}{m-n}$$

Рассмотрим отдельно выражение $m^6 - n^6$ и разложим на множители его:

$$m^6 - n^6 \underbrace{= (m^3)^2 - (n^3)^2 =}_{(1)} \underbrace{(m^3 - n^3)\cdot(m^3 + n^3) =}_{(2)} \underbrace{(m - n)\cdot(m^2 + mn + n^2)\cdot(m + n)\cdot(m^2 - mn + n^2)}_{(3)}$$

Здесь:

(1) – в соответствии со свойствами степеней шестые степени чисел представлены как квадраты их кубов ($a^6 = a^{3\cdot2} = (a^3)^2$);

(2) – разложение получившейся разности квадратов;

(3) – преобразование по формулам сокращённого умножения разности и суммы кубов.

Отсюда следует:

$$\frac{m^6-n^6}{m-n}=\frac{(m-n)(m^2+mn+n^2)(m+n)(m^2-mn+n^2)}{m-n}=(m^2+mn+n^2)(m+n)(m^2-mn+n^2)$$

Таким образом получается, что искомым разложением на множители будет такое:

$$m^5 + m^4n + m^3n^2 + m^2n^3 + mn^4 + n^5 = (m + n)(m^2 + mn + n^2)(m^2 - mn + n^2)$$

Ответ

$(m + n)(m^2 + mn + n^2)(m^2 - mn + n^2)$

Комментарий

Ученикам, знакомым с общей формулой разложения на множители выражения $a^k - b^k$:

$$a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + ... + a^2b^{k-3} + ab^{k-2} + b^{k-1}),$$

проще сразу догадаться умножить и поделить исходный многочлен на $(m - n)$, «срезав путь» к решению:

$$m^5+m^4n+m^3n^2+m^2n^3+mn^4+n^5=\frac{(m-n)(m^5+m^4n+m^3n^2+m^2n^3+mn^4+n^5)}{m-n}=\frac{m^6-n^6}{m-n}$$

Учителям математики рассмотренное задание можно использовать как есть, а можно на его основе составить целый ряд новых, подставив вместо одной переменной конкретные числа. Вот несколько вариантов:

1) $m^5 + 2m^4 + 4m^3 + 8m^2 + 16m + 32$
2) $a^5 + 3a^4 + 9a^3 + 27a^2 + 81a + 243$
3) $x^5 + 0{,}1x^4 + 0{,}01x^3 + 0{,}001x^2 + 0{,}0001x + 0{,}00001$