Найти значение выражения, если n – натуральное, а m – целое:

$$\sqrt{n+m\cdot\sqrt{n+m\cdot\sqrt{n+...}}}$$

Р е ш е н и е

В задаче спрашивается о нахождении значения бесконечного количества вложенных друг в друга выражений, содержащих квадратный корень. Обозначим искомую величину как x:

$$\sqrt{n+m\cdot\sqrt{n+m\cdot\sqrt{n+...}}}=x$$

Здесь же следует сразу отметить, что $x \geq 0$, так как значение квадратного корня по определению неотрицательно. Второе, на что следует обратить внимание – выражение, стоящее под самым первых корнем, также содержит x:

$$\sqrt{n+m\cdot\underbrace{\sqrt{n+m\cdot\sqrt{n+...}}}_{x}}$$

Таким образом можно записать следующее:

$$\sqrt{n+mx}=x \qquad (1)$$

Легко видеть, что сама задача будет иметь решение, только в случае выполнения условия:

$$n + mx \geq 0 \qquad (2)$$

Для нахождения значения x возведём обе части (1) в квадрат:

$$n + mx = x^2$$

После переноса слагаемых в правую часть получается квадратное уравнение вида

$$x^2 - mx - n = 0$$

Его корни можно выразить следующим образом:

$$x_{1,2}=\frac{-(-m)\pm\sqrt{(-m)^2-4\cdot1\cdot(-n)}}{2\cdot1}=\frac{m\pm\sqrt{m^2+4n}}{2}$$

Дискриминант уравнения $D = m^2 + 4n$ всегда положителен, так как $m^2 \geq 0$, а по условию задачи $n \in \mathbb{N}$.

Сделаем небольшое отступление и сравним между собой m и $\sqrt{m^2+4n}$.

В случае, если $m < 0$, то очевидно, что $\sqrt{m^2+4n} > m$.

Теперь примем, что $m \geq 0$. Так как n – натуральное, то $m^2 + 4n > m^2$, а отсюда следует, что $\sqrt{m^2+4n} > m$ ($m = \sqrt{m^2}$).

Таким образом получается, что всегда $\sqrt{m^2+4n} > m$. Помня, что по смыслу задачи $x \geq 0$, получаем, что корень уравнения

$$x=\frac{m-\sqrt{m^2+4n}}{2}$$

будет посторонним, ибо всегда отрицателен. Следовательно, в качестве решения задачи нам может подойти другой, всегда положительный, корень

$$x=\frac{m+\sqrt{m^2+4n}}{2} \qquad (3)$$

(при $m \geq 0$ положительный знак x не вызывает сомнений; в случае, когда $m < 0$, x всё равно больше нуля, так как $|m| < \sqrt{m^2+4n}$), но сначала его необходимо проверить на соответствие требованию (2). В случае $m = 0$ оно выполняется при любом n, так как по условию задачи $n \in \mathbb{N}$. Если $m > 0$, то (2) также выполняется ($x > 0$, значит $mx > 0$, отсюда $n + mx > 0$).

Более интересна ситуация, когда $m < 0$. С учётом этого (2) можно преобразовать к виду:

$$x\leq-\frac{n}{m}$$

Подставим в это неравенство значение x из (3):

$$\frac{m+\sqrt{m^2+4n}}{2}\le-\frac{n}{m} \qquad (4)$$

Домножим обе его части на 2, после чего из обеих частей вычтем m. Получим:

$$\sqrt{m^2+4n}\le-\frac{2n}{m}-m$$

Правую часть неравенства удобнее преобразовать так:

$$-\frac{2n}{m}-m=-\left(\frac{2n}{m}+m\right)=-\frac{2n+m^2}{m}=\frac{2n+m^2}{-m}$$

Это позволяет представить (4) в виде

$$\sqrt{m^2+4n}\le\frac{2n+m^2}{-m}$$

В правой части неравенства числитель дроби $2n + m^2 > 0$ и знаменатель $-m > 0$ (следует напомнить, что мы рассматриваем случай отрицательных значений m), значит сама дробь (правая часть неравенства) также положительна и смысл всего неравенства не изменится при возведении обеих его частей в квадрат:

$$\left(\sqrt{m^2+4n}\right)^2\le\left(\frac{2n+m^2}{-m}\right)^2$$

Выполним следующие равносильные преобразования:

$$\left(\sqrt{m^2+4n}\right)^2\le\left(\frac{2n+m^2}{-m}\right)^2 \;\Leftrightarrow\; m^2+4n\le\frac{(2n+m^2)^2}{(-m)^2} \;\Leftrightarrow\; m^2+4n\le\frac{4n^2+2\cdot2n\cdot m^2+m^4}{m^2} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; m^4+4nm^2\le4n^2+4nm^2+m^4 \;\Leftrightarrow\; 0\le4n^2 \;\Leftrightarrow\; n^2\ge0$$

Неравенство $n^2 \ge 0$ справедливо при любом действительном n, в том числе и при натуральном. Отсюда следует, что (4) всегда выполняется и при отрицательных значениях m. С учётом рассмотренных случаев для $m = 0$ и $m > 0$ выходит, что условие (2) выполняется при любых целых m. Из сказанного вытекает, что исходная задача для $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{Z}$ всегда имеет решение, равное величине x из (3):

$$\sqrt{n+m\cdot\sqrt{n+m\cdot\sqrt{n+\ldots}}}=\frac{m+\sqrt{m^2+4n}}{2}$$

О т в е т

$$\frac{m+\sqrt{m^2+4n}}{2}$$

К о м м е н т а р и й

В Сети мне неоднократно попадались разборы задач, в которых требовалось найти значения выражений указанного типа. Например, на дзен-канале “Valery Volkov” представлено такое*:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$$

Решаются они однотипно, а поскольку математика – наука, пуще других тяготеющая к разным обобщениям, то это и послужило стимулом к формулировке предложенной здесь задачи в более общем виде. Решение её даёт учащимся готовую формулу для вычисления ответа, учителям же эта формула может пригодиться при составлении разных вариантов таких заданий (для проверочных, контрольных и тому подобных работ).

© Широков Александр, 08.03.2023

* Видеоролик «Решить за 2 минуты! Вычислить: sqrt(2+sqrt(2+sqrt(2+...)))» // DZEN.RU/VALERYVOLKOV: Дзен-канал “Valery Volkov”. URL: https://dzen.ru/video/watch/639227a0a43dca249a9065fa (дата обращения: 08.03.2023)