Решите уравнение:

$$e^{4x}+\sqrt{e}=(\sqrt{e}+1)\cdot e^{2x}$$

Решение

Сделаем следующую замену переменных: $e^{2x}=t$. В этом случае:

$$e^{4x}=e^{2x\cdot 2}=(e^{2x})^2=t^2$$

Исходное уравнение тогда преобразуется к виду:

$$t^2+\sqrt{e}=(\sqrt{e}+1)\cdot t$$

Относительно переменной t оно является квадратным:

$$t^2-(\sqrt{e}+1)\cdot t+\sqrt{e}=0$$

Найдём его дискриминант D:

$$D=(-(\sqrt{e}+1))^2-4\cdot 1\cdot\sqrt{e}=(\sqrt{e}+1)^2-4\sqrt{e}=(\sqrt{e})^2+2\cdot\sqrt{e}\cdot 1+1^2-4\sqrt{e}=(\sqrt{e})^2-2\cdot\sqrt{e}\cdot 1+1^2=(\sqrt{e}-1)^2$$

Для удобства извлечём сначала квадратный корень из дискриминанта:

$$\sqrt{D}=\sqrt{(\sqrt{e}-1)^2}=|\sqrt{e}-1|=\sqrt{e}-1$$

($e > 2 > 1$ и потому $\sqrt{e} > 1$, значит подмодульное выражение неотрицательное и освобождается из-под модуля без изменения знака).

Корни квадратного уравнения в нашем случае будут равны

$$t_{1,2}=\frac{-(-(\sqrt{e}+1))\pm\sqrt{D}}{2\cdot 1}=\frac{\sqrt{e}+1\pm\sqrt{D}}{2}$$

Отсюда

$$t_1=\frac{\sqrt{e}+1+\sqrt{e}-1}{2}=\frac{2\sqrt{e}}{2}=\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}$$

$$t_2=\frac{\sqrt{e}+1-(\sqrt{e}-1)}{2}=\frac{\sqrt{e}+1-\sqrt{e}+1}{2}=1=e^0$$

Возвращаясь к старой переменной, получаем, что

$$e^{2x}=e^{\frac{1}{2}} \text{ или } e^{2x}=e^0$$

Первое равенство соблюдается только если $2x=\frac{1}{2}$. Отсюда $x_1=\frac{1}{4}$. Во втором случае необходимо, чтобы $2x=0$. Таким образом, второй корень уравнения есть $x_2=0$.

Ответ

$x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=0$