

Школьные задачи / Алгебра / А-10

Построить график уравнения:

$$\sin x = \sin y$$

Решение

Проведём с исходным уравнением необходимые равносильные преобразования (перенесём $\sin y$ в левую часть, получившуюся разность с использованием соответствующего тождества преобразуем в произведение, в котором множители, представляющие собой тригонометрические функции, приравняем к нулю и найдём решения y получившихся уравнений):

$$\begin{aligned} \sin x = \sin y &\Leftrightarrow \sin x - \sin y = 0 \Leftrightarrow 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{x+y}{2} = 0 \\ \sin \frac{x-y}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ \frac{x-y}{2} = \pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \pi + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ x-y = 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + \pi(2n+1), & n \in \mathbb{Z} \\ y = x + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

Примечание: так как под k подразумевается всё множество целых чисел $0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то при последнем преобразовании во втором выражении перед $2\pi k$ допустимо поставить знак «плюс», хотя в соответствии с правилами там должен стоять «минус»: $y = x - 2\pi k$.

В получившемся объединении первое выражение описывает серию уравнений:

$$\begin{aligned} &\dots \\ y &= -x - 3\pi \\ y &= -x - \pi \\ y &= -x + \pi \\ y &= -x + 3\pi \\ &\dots \end{aligned}$$

На координатной плоскости графики их представляют собой множество прямых линий, наклонённых под углом 135° по отношению к положительному направлению оси абсцисс и смещённых друг относительно друга по оси ординат на 2π (рис. 1).

Второе выражение задаёт другую серию уравнений:

$$\begin{aligned} &\dots \\ y &= x - 4\pi \\ y &= x - 2\pi \\ y &= x \\ y &= x + 2\pi \\ y &= x + 4\pi \\ &\dots \end{aligned}$$

Их графики также являются прямыми линиями, наклонёнными под углом 45° по отношению к положительному направлению оси абсцисс, и смещёнными друг относительно друга по оси ординат на 2π (рис. 2).

Из сказанного следует, что графиком исходного уравнения будет являться объединение двух описанных серий линий, которые на координатной плоскости образуют рисунок в виде бесконечной квадратной сетки, повернутой «наискосок».

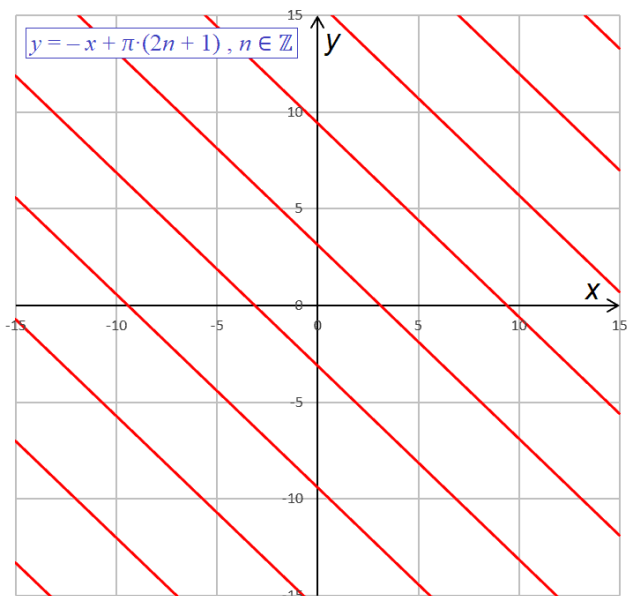


Рис. 1.

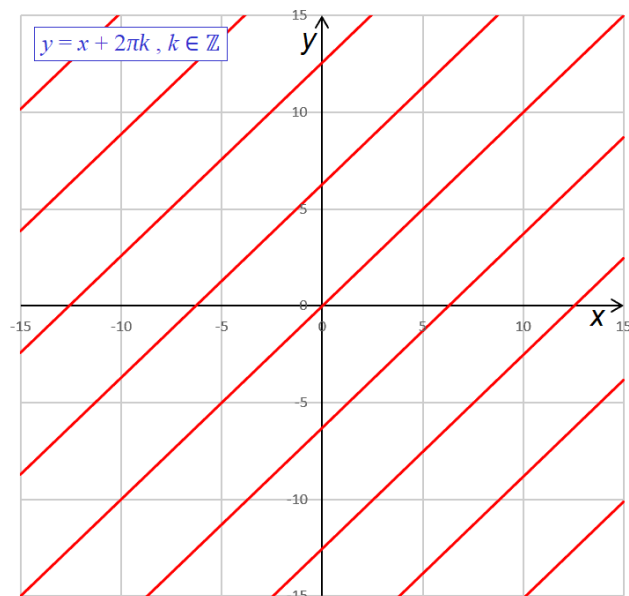
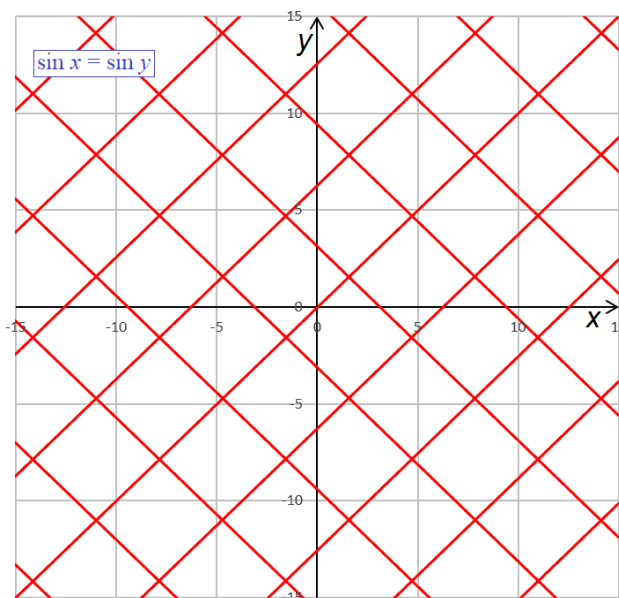


Рис. 2.

О т в е т



© Широков Александр, 29.12.2022